ゲージ理論入門 II（第2版）

―弱い相互作用と強い相互作用

I.J.R. エイチスン・A.J.G. ヘイ/著
藤井昭彦/訳

講談社サイエンティフィク

GRADUATE STUDENT SERIES IN PHYSICS

Series Editor: Professor Douglas F Brewer, M.A., D.Phil.
Professor of Experimental Physics, University of Sussex

GAUGE THEORIES IN PARTICLE PHYSICS

A PRACTICAL INTRODUCTION
2nd edition

IAN J R AITCHISON
Department of Theoretical Physics
University of Oxford

ANTHONY J G HEY
Department of Electronics and Computer Science
University of Southampton

ADAM HILGER, BRISTOL AND PHILADELPHIA

Originally published in English by Adam Hilger, Techno House, Redcliffe Way, Bristol BS1 6NX, England.
First published 1989

まえがき

1982 年に出版された本書の第 1 版のまえがきで，著者らは次のように書いておいた．“本書は，素粒子物理学において物理的関心の高い多くの諸量を計算する実用的な手引になることを意図している．今日，これはゲージ場諸理論に適する Feynman 図形の手引きと，これら図形に基づく計算技術である．著者らの目的は，高エネルギー物理学の最近の実験で検証されつつあるゲージ諸理論を，“適正”に理解するために必要な最少かつ本質的な知識を与えることである”．ゲージ諸理論の予言をできるだけ広範囲の人々に理解できるものにしたい，という強い希望が著者らの動機になっていた．この点に関しては，文献は一般にきわめて技術的だったからである．本書の 3 つの特徴は，以下に述べるように，いずれも“とっつきやすさ”の要求から生じたものであった．まず，ラグランジアンに基づく場の量子論の枠組を排して，かわりに波動関数を用いる Feynman の構想に基づく直観的方法をとったこと．つぎに，本書のはじめの 1/3 は，ゲージ理論の起源ともなりかつもっともよくわかっている量子電磁力学の解説にあて，比較的なじみ深い状況で多くの計算技術を紹介し，そののち強い相互作用・弱い相互作用のゲージ諸理論に一般化したこと．最後に，可能な限り，形式上および概念上の難しい点を説明するために物理的な議論や類推を用いたこと．

第 1 版の刊行から 6 年たち，粒子物理学の状況にもいくつかの点できわめて重要な変化があった．本書の刊行とほぼ時を同じくして，よく知られているように，CERN（欧州原子核共同研究機関）の陽子・反陽子衝突型加速器を用いた UA 1，UA 2 グループの一連の大発見が行われた．これらの実験は，弱い相互作用の Glashow-Salam-Weinberg 理論の主要な予言を華麗に確認したばかりでなく，さらに QCD の支持をも与えた．その後の高精度の実験により，“標準モデル”（標準模型）の安定性は特に疑いを入れる余地はなく，これからのよ

り野心的な理論は，このモデルをある適切な極限内至近似として含まなくてはならないと考えられている．

実際，第二の特筆すべき特徴は，議論の余地なく確定度の高い方法で“標準モデル”を超える“統一理論”がただ1つ生じてくることはない，という認識である．大統一，テクニカラー，超対称性，超重力，ひも（弦）の理論などそれぞれ注目すべき点を持っているが，しかし，次の世代の加速器で得られる（と望まれている）より多くの実験的手がかりが，強く強く必要とされているのである．その意味では，標準モデルは理論的にも実験的にも，比較的自己充足的で堅固な一章とみなされてよい．この点で“一線を画し”あとはTeV領域の情報を待つというのは合理的な態度である．

実験的な発見，そこから生ずる多様な理論的見通しは，共に本書（第1版）を大きく改訂させる必要を示していたが，一方もともとの目的や動機や方法を忠実に残す必要も明示していた．きわめて明らかであったが，最近の実験的発見をかなりの程度議論することが本質的に必要と思われた．本書第1版の主要な目的は，標準モデルの3つのゲージ理論の中で簡単な計算を行って，実験と比較しうる意味のある結果を得ることであった．今やあまりにも多くの実験結果が発表されているので，理論と実験の対決を示すデータの価値はきわめて高い．したがって，本書第1版が実験データをわずか5つの図に表したところを，第2版は50以上もの図に表すことができたのである．

理論の方面でも大きな修正を行った．実は，第1版を事実上裏返してしまった．第1版では，ゲージ原理とゲージ理論としてのQEDの議論は第8章ではじめて現れてきたが，新版では早くも第2章にでてくる．実際，第1版より演繹的な方法を採用した．QEDの発見法的な展開に重きをおき，ほかの理論もその類推のうえに立ててきたのに対し，今度はQEDの“ゲージ”観をもっとも信頼のおける論理的出発点としてとりあげ，この概念を標準モデルの中心に据えたのである．

さらに，場の量子論の方法を導入すべきか否か，という決定的な点において，著者らは態度を変更した．これは，ひもの理論が場の量子論にとってかわるような形勢にある時点で，いささか皮肉と思われるかもしれない．しかしながら，標準モデルの成功は場の理論の概念の重要な立証をなすもので，自然界の3つ

の力を，1つの概念の枠組のなか（微妙な違いは別として）で理解することに成功している．

まさに物質と力の本質に関する古くからの疑問に答えて，20世紀の解答の中心をなす量子場の基礎物理は，いままでよりずっと近づきやすいものになったはずである，と考えられる．そこで場の量子論の初等的導入を自己完結する形で第4章に取り入れることを試みた．可能な限り物理的なモデルや類推を強調しながらも，計算の段階で役にたつような形式も展開するように努めた．そのうえで第5章にやや詳しく，なぜ2つの荷電粒子間の電磁相互作用が光子の“交換”によるとみなしうるかを論ずることができた．本書第1版では，量子を放出したり吸収したりする定式化を入れておらず，この決定的な点を発見的な方法に頼ったので，何か厳密でないものになってしまったことは否めない．もちろん，これはFeynman図形の共変的な振幅の物理的解釈にとって，基本的な事がらである．

ラグランジアンに基づく場の量子論は，本書第1版の明らかな不備 — 電荷のような物理量の保存とそれに対する対称性の間の失われた鎖 — をとり払うことにもなる(4．6節および第8章参照)．さらに対称性の自発的破れの議論を改良することもできる（第13章)．

しかし，波動関数を捨て去ることは断じて行わなかった！　他の方法では得られないような重要な物理的洞察を得るため，場の量子論のごく一部を（本書で行ったように）取り入れることは可能であるように思われた．しかしそのほかは，すなわち実用的な計算は，前版と同じく波動関数の方法によった．場の理論に基づく摂動論を完璧に展開することはもとより本書の範囲を超えているからである．もっともやさしいゲージ理論（QED）をまず展開する，という計画は前版のとおりであるし，また当然である．

最後の大きな改訂は，QCDに関する（長い）章をつけ加えたことである．本書第1版ではQCDには余り関心を払っていなかった．他の部分と同じく，QCD理論も第一原理からできるだけ簡単な方法で出発し，実験と対決できる点まで展開する，というのが本書の目的であった．これはかなりレベルの高い注文で，最後の節(9．5および9．6節)は初読の際は省略してもよい．もちろん，ここでは摂動的QCDを論じているので，第15章の“4つの話題”の中に，場の理

論の格子による方法をQCDの非摂動的側面とともに入れておいた.

本書第1版は，大変わかりやすかった — 少なくともいろいろな分野の広い範囲にわたる人々に読んでもらえた．これは当時，比較的“初等的”なレベルでは他の書物がほとんどなかったからに違いない．第1版の内容にさまざま付け加えたことで，ある読みやすさ（これが原則的な目的であることに変わりはない）を損なわなかったことを切に希望している．実験データの記述を増やしたことは障害ではなく，むしろ理論の理解に役だつものと感じている．場の量子論の本質を把握することは，理解を容易ならしめるばかりでなく，それ自身として刺激的なことだと考えたい．このほかにまったく新しい章，第1章を付け加えて，粒子物理学の“事実”とそれを解析するのに用いられる理論の簡単な概観を述べておいた．ここでは，標準モデルを過去100年間におよぶ物理の概念的展開の見地から中心に据えおいた．これは非専門家に本書の全題目をより抵抗少なくとりついでいただくことを期待したからである．

今度の版では，したがって第1部は顕著な実験事実の簡単な概観からはじめ，ついでそれらを理解するためのさまざまな理論的概念の紹介がやや詳しく続く．これは第1版と大きく異なるところで，第1版では概念上の詳しい点は終わりのほうまで残しておいて，まずできるだけ早くQEDの“実際計算”ができるように意図したのであった．新版の構成のほうがたしかに論理的にみえるが，またその代償ももちろん払ったことになった．断面積を計算する前に全体のページ数の1/4を費やしてしまったのである．しかしながら，読者諸氏も（教師諸君も）第1章に与えた詳しい概念上の基礎が，実用計算を少し待つことに値する，と考えてくれることを希望する．計算は第2部から集中的に行うが，これは第1版のQED資料をほとんどそのまま利用している．第3部では非可換ゲージ理論とQCDの概観を行う．第4部は弱い相互作用の現象論，第5部は電磁弱理論の展開である．第1版との主要な違いは，場の量子論を（制限された範囲で）用いたことと，たくさんの実験データをとり入れたことである．最後に第6部では読者を，枝線図形を超え，摂動論を超え，（多少とも）標準モデルを超えた所へ案内する．書き加えは全体としてかなりの量になるから，増大した大きさに合わせるために付録Aもかなり拡大されている．

謝　詞

以上に本書第1版のまえがきから，当時お世話になったたくさんの方々への感謝の言葉を再録する．もちろん，その助力はこの版でも大部分の所に生かされている．

著者の1人Aitchisonは，J. C. Taylor, C. L. Smith，のちにG. Rossと同じ階に研究室を持つ，という特権を享受し，これらの人々から多くを学んだ．のちの2人は本書第12章（新版の第15章）の草稿を読んで，有用なコメントを与えてくれた．同じくR. Stinchcombeも第9章（新版の第13章）の初期の草稿に有用な示唆を与えてくれた．C. Fraserは，多くの章の草稿について鋭い批判をよせ，親切に力づけてくれた．最後に，Aitchisonはニューヨーク州ロチェスター市のR. T. French Companyに深甚な謝意を表する．その援助により1978～79年の1年間ロチェスター大学に滞在することができ，その間すべての教育義務から離れて，知識の不足を補うのに少なくとも多少の進歩をなすことができた．著者の1人Heyは，サウザンプトン大学の同僚諸氏の温かい支援に感謝する．特にG. McEwenはこのような書物の執筆をおおいにすすめてくれた．著者2人は，第9章（新版の第13章）の草稿についてJ. MandulaとD. Nicoleの寄せられた俊敏なコメントに感謝する．J. Patonは第9章（新版の第13章）を草稿段階で批判してくれたばかりでなく，完全原稿に目を通して，非常に重要な示唆を与えてくれた．J. AmbjornとR. Hughesは第8（新版の第2章および第8章），第9（新版の第13章），第12（新版の第15章）章の校正刷を克明に読んでコメントをしてくれ，D. BailinとB. Kellyはそれぞれ，重大な思い違いを訂正してくれた．著者はまた，オックスフォード大学およびサウザンプトン大学，また夏期学校における数世代の学生諸君に感謝する．彼らはこの計画の初めから，いろいろ建設的な注意を寄せてくれた．本書に誤りはもはや残っていない，と十分信頼している．S. Makinは長い複雑な原稿を快くタイプしてくれ，J. Heyは索引の作製に協力してくれた．併せて深く感謝するしだいである．

また第1版に散見した小さな誤りや誤植を注意してくれた方々に感謝する．

これらは1983年の増刷版で訂正しておいた．QEDの現状（6．10節）を最新のものにするため，T. Kinoshita（木下東一郎）教授の書簡から大きな恩恵を受けた．

この版で新しく設けた章は，多くの人々に負うている．第4章のたねは，Heyが1984，1985年にRutherford Appleton研究所（RAL）で高エネルギー物理若手の学校で行ったただ一回の"場の量子論とFeynmanの規則"と題した突貫講義である．この内容はJ. BellのCERN夏の学校の講義"実験的場の量子論"に触発されている．当時RALで若手の学校を主宰していたR. Cashmoreはこの新基軸を力づけ，さらにHeyの講義"素人の格子ゲージ理論"を入れるためプログラムを空けてくれた．この講義は本書第15章の最後の節のもとになっている．RAL若手の学校におけるHeyの地位はAitchisonが1986年に引き継いだ．新しい主宰者J. Daintonは熱心にかつ無心に場の量子論の教養を大幅に取り入れることを主張した．第4章はその結果の一部である．第9章および第14章の新しい節の原稿を次々と作っていく間に，多くの人々の専門的な助力におおいに恩恵を受けた．これはAitchisonが1985～86年の間CERNに滞在したことからはじまる．研修を許可してくれたことに対し，Oxford大学およびWorcester学寮に，またCERN理論部の心温まる歓待に対し，M. Jacobに感謝する．このCERN研修は，すでに新しいデータを得ている人々と接触し，新しいデータの意義を把握するまたとない機会であった．特に，L. DiLellaは教育的価値絶大な講義ノートやOHPシートや総合報告の資料などを惜しみなく提供してくれた．T. Weidberg，H. Cheungは第9章および第14章を注意深く読んでくれた．Cheungは当時研究生であったがまた理想的な読者代表であった．同様に，S. GeerおよびB. Scottは同章の内容について有用な資料を与えてくれた．M. Penningtonもまた第9章について注意を寄せてくれたが，その大半は彼の優れた論文*Report on Progress in Physics*, **46**, 393（1983）から重要な概念を引用している．主要な発見については均衡のとれた取り扱いをしたつもりであるが，"誰が何をしたか"という見地では，時に強い感情が喚起される場合もあることを著者らはよく知っている．以上に記した諸兄の助力にもかかわらず，本書の記述に対する責任は一切著者にある．もし不注意にも誤った印象や誤りやすい印象を作り出したならばお詫びし，丁寧に修正して下さること

を望み，修正を聞き入れたいと思っている．

特別な謝詞がまだ残っている．E. Squires は Adam Hilger 出版社を代表して終段階の全原稿を隅から隅まで読み，不適切な個所やよくない個所をたくさん指摘してくれた．著者らは同氏に深く感謝する．G. McEwin は Southampton グループの同僚および学生として，原稿のいろいろな節に有用な注意をしてくれうむことがなかった．Hey は同氏に深く感謝する．著者らは Kent 州 Green-hithe の商船学校長 G. Emmons 氏に特別な感謝の言葉を贈りたい．氏自身は素粒子理論家ではないが，このたぐいの問題にあふれんばかりの熱心さで関心を寄せ，著者ら同様にこの第 2 版のはじめから終わりまで付き合ってくれた．初期の原稿に定性的変化をもたらした賢明な示唆に加え，終期の原稿では細心な完璧さで方程式の細部まで検討してくれた．また普通の友人の枠を超えて，校正まで一緒にやってくれた．著者らは深く同氏を徳とするものである．このような努力にもかかわらず，まちがいは残っているかもしれないということもよく承知している．お気づきの点があれば著者らにご注意下さると幸いである．

1988 年 5 月

I. J. R. Aitchison

A. J. G. Hey

訳者まえがき

本書の第1版は1982年（訳書は1983年），第2版は1989年の刊行である．この間にいわゆる標準モデル，すなわち電弱理論と摂動論的QCD（量子色力学）が定着した．第1版は，量子力学の標準的な知識を持つ読者に対し，高エネルギー過程の計算法をself-containedに伝授する，という所期の目的をよく果たしたと思う．

この第2版は，標準モデルの物理像，非可換ゲージ理論とQCD，場の量子論入門などの章を補って，第1版にくらべ70%近い増ページになっている．しかし新版でも旧版と同じく，実用的な計算はすべて波動関数を用いる一体の量子力学の枠内で行なっている．場の量子論への序説は，その正当化のために新たに付け加えられたものである．著者らがまえがきで自賛しているように，ゲージ諸理論の理解と応用という目的に対しては，新版は初等教科書としてより系統的より包括的であり，したがって改訂の実が上がっていると言ってよい．

新訳書は再び2分冊に分ち，第I巻には全体の序論とQED（量子電磁力学），第II巻にはQCDと電弱理論を配した．第I巻の思想的中核は，相対論的波動方程式の負エネルギー解を反粒子と同定するFeynmanの解釈である．またその技術的中核は，Feynman diagram（図形）による摂動計算，いうなれば“diagrammar”の詳細な解説である．原著の副題として“A Practical Introduction”と注記されているように，付録も含めて断面積の計算に必要なあらゆるknow-howが，余す所なく与えられている．

第II巻の思想的中核は，非可換ゲージ諸理論と，それを現実の世界に適用するときに必要なHiggs機構という力学的モデルである．半世紀前のFermiのベータ崩壊の理論・湯川の核力の理論以来40年間，素粒子の理論は運動学と現象論の枠を超えることができなかった．素粒子間の相互作用を記述する力学原理が欠けていたからである．今日，物質の素子と考えられる基本粒子はクォー

クとレプトンであるが，これらの粒子はスピン 1/2 の“質点”としての時空（あるいは外部）自由度のほかに，時空間の自由度には帰着できないある内部自由度を持つと断ぜざるをえない．この内部空間の構造に関して特定のモデルをひとつ設定すれば，あとは自動的に基本粒子間の相互作用が決まってしまう，という論理と手続きがゲージ原理である．現在この力学原理は，基本粒子のすべての相互作用に普遍的に成立するものと信じられている．

原著の各章の終わりには問題が与えられている．これは新しい題材を開拓するというよりは，むしろ本文の内容を理解するために，本来ならば本文に組み込まれてしかるべき計算を別紙で行え，という類いのものである．本文の行間を埋めながら読破しようという諸君は容易に答を得てしまうであろうが，初学や独学の読者の便宜をはかって，原著にはない略解をつけておいた．

素粒子・原子核など，sub-atomic physics の勉強を始める学部高学年・大学院初学年の諸君が，短期間に集積しなければならない知識は多い．この訳書がそのような若い諸君の教科書・参考書として，相対論的量子力学やゲージ理論の学習に役立てば，訳者にとって望外の幸せである．

1992 年 1 月

藤井昭彦

目　　　次

第4部　未完成の理論 — 弱い相互作用の現象論

第5部　電弱相互作用の理論

第 I 巻目次

第3部　非可換ゲージ理論とＱＣＤ

（前略）したがって中性子と陽子の間に差異をつけることは，まったく任意の方法によって差し支えない．しかし，普通に受け入れられていることだが，この任意性は次の制約を受けなくてはならない．いったんある時空点で何を陽子，何を中性子と呼ぶか決めた以上，そのほかの時空点でほかの選択を行う自由はない．

　これは普通の物理理論の基礎にある局所場の概念と相入れないように思われる．この論文では，あらゆる相互作用がすべての時空点で独立なアイソスピンの回転に対して不変である，と要請する可能性について調べようと思う．（後略）

Yang & Mills（1954）

第 8 章 非可換ゲージ理論

前章までに，きわめて簡単な基本原理，すなわち理論が荷電粒子の波動関数（第 2 章）あるいは場の演算子（第 4 章）に働く局所的位相変換に対して不変である，という基本原理に基づく完全な力学理論 — QED — を紹介してきた．位相因子は交換するから，このような変換は可換（2.6 節(iii)）という特徴を持つ．本書の残りの部分は，“位相因子”が一般には互いに交換しない行列演算子を含むとき，この原理の一般化の上に立てられた理論の定式化とその初等的応用について述べるつもりである．このような不変性を局所化して得られる理論を非可換（または非 Abel 的）ゲージ理論という．この章では，この種の理論を紹介するが，まずより簡単な大局的（局所的でない）非可換位相不変性からはじめる．素粒子物理で最初に用いられたこの種の対称性は，Heisenberg (1932) によって核物理との関連で提唱されたハドロンの荷電“SU(2)”対称性であった．現在では，この対称性は u, d クォークの質量がほぼ等しいことと，QCD の力（次章参照）がフレイバーによらないことに由来すると考えられている．この $SU(2)_f$ フレイバー対称性は，Gell-Mann (1961) および Ne'eman (1961) によって $SU(3)_f$ に拡張され，これは u, d, s クォークがほぼ等しい質量を持ち，QCD がフレイバーによらないことを反映する，と考えられている．

これら大局的非可換フレイバー対称性を考察したのち，局所的な対称性の場合に転ずる．この章のはじめに Yang & Mills (1954) の論文から引用したように，非可換ゲージ理論の近代的な展開はすべて (Shaw, 1955)，ハドロンのアイソスピンを局所的対称性にするこの試みからはじまっている．しかし，彼らによって展開された美しい定式化は，ハドロン間の相互作用を記述するのではないことが判明している．そうではなく，この対称性はハドロン構成粒子クォーク間の相互作用を，2 つの面で記述するものである．第一に，ある局所的 SU(2) 対称性（“弱いアイソスピン”と呼ばれる）はクォーク（およびレプトン）

間の弱い相互作用を支配し，次にある局所的 SU(3) 対称性（“カラー SU(3)”または “$SU(3)_c$” 対称性と呼ばれる）はクォーク間の強い相互作用を支配する．これら 2 つの局所的対称性は，以前の大局的（フレイバー）対称性のひとつと同じ群に基づいているにもかかわらず，物理はまったく異なったものであることを納得することが大切である．弱い相互作用の場合，群は SU(2) であって“アイソスピンの言葉”で語ることが自然であるが，これはいつも弱いアイソスピンであることを忘れてはならない．（第 13 章，第 14 章参照）弱いアイソスピンは，レプトンにもクォークと同じように与えられる属性で，したがってハドロンのアイソスピンとは物理的にまったく別のものである．クォークの強い相互作用の場合，$SU(3)_c$ 群は新しい自由度（“カラー”または色）に働き，これはフレイバー u，d，s とはまったく別物（第 9 章参照）である．

8.1　非可換大局的位相不変性と内部対称性の多重子

2.5 節でゲージ原理に関連してはじめに考えられた変換は，ひとつの波動関数の大局的位相変換

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi \tag{8.1}$$

であった．非可換不変性への一般化は，一時にひとつ以上の波動関数（あるいは状態）を考えるという，簡単ではあるが多くの応用を持つ第一歩からはじまる．量子力学では非常に一般的に，エネルギー（あるいは質量）が縮退している状態の組には状態を指定する一義的な方法がないことが知られている．はじめに選んだある状態の組の任意の線型結合は，状態の規格条件が満たされている限り，まったく同じ役に立つ．例えば，状態としてただ 2 つのもっとも簡単な場合を考え，中性子と陽子としてみよう（図 8.1）．質量がほぼ一致することから，Heisenberg（1932）は，強い核力に関する限り（電磁気的効果は核力に比較して無視をして）2 つの状態は真に縮退していて，中性子と陽子の任意の



図 8.1　アイソスピン対称の初期の検証

線型結合は，この力に関しては単一の“中性子”や単一の“陽子”とまったく等価である，と考えた．したがって中性子および陽子の波動関数を定義し直し，複素定数 α，β，γ，δ を用いて

$$\psi_{\mathrm{p}} \to \psi'_{\mathrm{p}} = \alpha\psi_{\mathrm{p}} + \beta\psi_{\mathrm{n}} \tag{8.2 a}$$

$$\psi_{\mathrm{n}} \to \psi'_{\mathrm{n}} = \gamma\psi_{\mathrm{p}} + \delta\psi_{\mathrm{n}} \tag{8.2 b}$$

とおくことが許されるであろう．特に ψ_{p} と ψ_{n} は縮退しているから

$$H\psi_{\mathrm{p}} = E\psi_{\mathrm{p}}, \qquad H\psi_{\mathrm{n}} = E\psi_{\mathrm{n}} \tag{8.3}$$

が成り立ち，これから

$$\begin{aligned} H\psi'_{\mathrm{p}} &= H(\alpha\psi_{\mathrm{p}} + \beta\psi_{\mathrm{n}}) = \alpha H\psi_{\mathrm{p}} + \beta H\psi_{\mathrm{n}} \\ &= E(\alpha\psi_{\mathrm{p}} + \beta\psi_{\mathrm{n}}) = E\psi'_{\mathrm{p}} \end{aligned} \tag{8.4 a}$$

および同様にして

$$H\psi'_{\mathrm{n}} = E\psi'_{\mathrm{n}} \tag{8.4 b}$$

を得る．これは定義しなおした波動関数 ψ'_{p}，ψ'_{n} もエネルギーの縮退を伴う同じ2つの状態を記述することを表す．

図8.1に見られる2重の縮退は，スピン1/2の系が磁場のないときに持つ縮退を思い出させる．$s_z = \pm 1/2$ 成分は縮退している．この類推は次の2成分の核子アイソスピノールを導入すれば明らかになる．

$$\psi^{(1/2)} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{p}} \\ \psi_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \equiv \psi_{\mathrm{p}}\chi_{\mathrm{p}}^{(1/2)} + \psi_{\mathrm{n}}\chi_{\mathrm{n}}^{(1/2)} \tag{8.5}$$

ここに

$$\chi_{\mathrm{p}}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{\mathrm{n}}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

とおいた．$\psi^{(1/2)}$ の中で ψ_{p} は核子が“アイソスピン上向き”（式(8.6) 参照）を持つ振幅，ψ_{n} は“アイソスピン下向き”を持つ振幅である．“スピン演算子”がどう表せるか，すぐ説明する．

変換(8.2 a)，(8.2 b) は $\psi^{(1/2)}$ を用いると簡潔に

$$\psi^{(1/2)} \to \psi^{(1/2)\prime} = \mathbf{U}\psi^{(1/2)} \tag{8.7}$$

と書くことができる．$\mathbf{U}$ は2行2列の複素行列である．さて Heisenberg の提唱は，強い相互作用の物理は変換(8.7)のもとで変わらないということである．換

言すればある対称性が存在する，ということである．このような対称性は電磁相互作用がない時にのみ正確であることを強調しておかなくてはならない．したがって本質的には近似的な対称性である．

2 行 2 列の行列 $\mathbf{U}$ に対する制約は何であろうか．変換(8.7)はあからさまに書けば

$$\begin{pmatrix}\psi'_{\mathrm{p}}\\ \psi'_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\psi_{\mathrm{p}}\\ \psi_{\mathrm{n}}\end{pmatrix} \tag{8.8}$$

である．規格化（確率）を保存するために，$\mathbf{U}$ がユニタリー

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger}=\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}=\mathbf{1} \tag{8.9}$$

であると要請する．明らかに，この性質は 2 つの状態にだけ限られるものではない．もし n 個の縮退した状態があれば，変換係数は n 行 n 列の行列の要素になるであろう．自明な場合は $n=1$ のときで，すでに 2.6 節で述べたように，$\mathbf{U}$ はただひとつの位相因子に帰着する．これにより一般的な変換の特別の場合として，今までの結果が含まれるはずである．実際，行列式の基本的な性質から

$$\det \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger}=\det \mathbf{U}\cdot\det \mathbf{U}^{\dagger}=\det \mathbf{U}\cdot\det \mathbf{U}^{*}=|\det \mathbf{U}|^{2}=1 \tag{8.10}$$

であるから

$$\det \mathbf{U}=\exp(\mathrm{i}\theta) \tag{8.11}$$

が成り立つ．θ はある実数である．“p”と“n”を混合する変換の中からこのような共通の位相を分離してしまって差し支えない．それは p と n の波動関数を同じだけ回転することに対応するからである．理論が単一の位相因子の変換のもとに不変になることは，物理的に p と n の全個数の保存則に対応することは，場の理論の場合に 4.3 節でみたとおりである．

新しい物理は，

$$\det \mathbf{U}=+1 \tag{8.12}$$

を満たす残りの変換の中に含まれている．このような行列を特殊ユニタリー行列というが，これは単に行列式が 1 という意味である．このような行列 $\mathbf{U}$ 全体の集合は Lie 群 SU(2)，すなわち 2 行 2 列の特殊ユニタリー行列の群を作る．Lie 群は“無限小”変換，すなわち $\mathbf{U}=\mathbf{1}$ に対応する“変化なし”の状況からわずかに異なる行列 $\mathbf{U}$，を考えるときその物理的帰結が重要になる．したがって

この場合

$$\mathbf{U}=\mathbf{1}+\mathrm{i}\xi \tag{8.13}$$

と書くと，ξ は２行２列の行列でその要素は１次の微少量である．det $\mathbf{U}=1$ の条件は２次の微少量 $O(\xi^2)$ を無視すれば

$$\mathrm{Tr}\xi=0 \tag{8.14}$$

となる．$\mathbf{U}$ がユニタリー

$$(\mathbf{1}+\mathrm{i}\xi)(\mathbf{1}-\mathrm{i}\xi^\dagger)=\mathbf{1} \tag{8.15}$$

という条件は同じく１次の無限小まで考えて条件

$$\xi=\xi^\dagger \tag{8.16}$$

に還元される．したがって ξ は跡（対角和）がゼロになる Hermite 行列である．$\mathrm{Tr}\xi=0$ および $\xi=\xi^\dagger$ の条件に含まれる制約を数えてわかるように，このような行列は３個の独立なパラメーターを含み，一般に

$$\xi=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2 \tag{8.17}$$

と書ける．ここに $\boldsymbol{\varepsilon}$ は３つの量

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ \ \varepsilon_2,\ \ \varepsilon_3) \tag{8.18}$$

を表し，これらはすべて１次の微少量である．３つの行列 $\boldsymbol{\tau}$ はよく知られた Pauli 行列

$$\tau_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \tau_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\qquad \tau_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{8.19}$$

である．行列 $\tau/2$ は明らかにスピン 1/2 の粒子の角運動量と同じ交換関係

$$[\tau_i/2,\ \ \tau_j/2]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\tau}_k/2 \tag{8.20}$$

を満たす．基礎波動関数は，全“スピン”と“スピン”の第３成分の同時固有関数で

$$\frac{1}{4}\boldsymbol{\tau}^2\chi_{\mathrm{p}}^{(1/2)}=\frac{3}{4}\chi_{\mathrm{p}}^{(1/2)},\qquad \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_3\chi_{\mathrm{p}}^{(1/2)}=\frac{1}{2}\chi_{\mathrm{p}}^{(1/2)} \tag{8.21 a}$$

$$\frac{1}{4}\boldsymbol{\tau}^2\chi_{\mathrm{n}}^{(1/2)}=\frac{3}{4}\chi_{\mathrm{n}}^{(1/2)},\qquad \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_3\chi_{\mathrm{n}}^{(1/2)}=-\frac{1}{2}\chi_{\mathrm{n}}^{(1/2)} \tag{8.21 b}$$

を満たす．このｎとｐの“荷電空間”における２通りの自由度をアイソスピンという．

したがってp-n２重子の無限小 SU(2) 変換は

$$\begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{p}} \\ \psi'_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} = (\mathbf{1} + \mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{p}} \\ \psi_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

と書ける．有限な SU(2) 変換 **U** は，無限小の形から行列に拡張した指数の公式

$$\mathrm{e}^{A} = \lim_{n\to\infty}(1 + A/n)^{n} \tag{8.23}$$

を用いて得られる．$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha}/n$ とおき無限小変換を $\boldsymbol{n}$ 回行い，$\boldsymbol{n}$ を無限大にもってゆくと

$$\mathbf{U} = \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2) \tag{8.24}$$

となる．したがって

$$\psi^{(1/2)'} \equiv \begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{p}} \\ \psi'_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} = \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{p}} \\ \psi_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \equiv \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\psi^{(1/2)} \tag{8.25}$$

である．この形を見れば，この 2 行 2 列の変換は大局的な位相変換(8.1)の一般化であることが明らかである．ただし次の点が違う．

(a) 今度は <u>3</u> 個の“位相角” $\boldsymbol{\alpha}$ がある．

(b) 指数の肩には非可換な行列演算子 **U** が表れている．

この最後の性質が“非可換”位相変換と呼ばれる理由である．$\boldsymbol{\tau}$ 行列の交換関係が示すように，SU(2) 群は非可換群であって，SU(2) の 2 つの変換は一般には交換しない．これにくらべ，電荷や粒子数の場合は，引き続く変換は明らかに交換する．これは可換位相不変性，あるいは 2.6 節で述べたように，可換 **U**(1) 群に対応する．

変換(8.25) が強い核力の不変式あるいは対称性であるという仮定は，物理的にどういう結果を与えるか調べてみなくてはならない．何かそれに関連した保存則が存在することが期待される．このような 1 粒子状態では保存量を見いだすのは容易である．式(8.3)，(8.4) へ戻り

$$H\psi^{(1/2)} = E\psi^{(1/2)} \tag{8.26}$$

$$H\psi^{(1/2)'} = E\psi^{(1/2)'} \tag{8.27}$$

と書き直す．しかし

$$\psi^{(1/2)'} = \mathbf{U}\psi^{(1/2)} \tag{8.28}$$

が成り立つから

$$HU\psi^{(1/2)}=H\psi^{(1/2)\prime}=E\psi^{(1/2)\prime}=EU\psi^{(1/2)} \\ =UE\psi^{(1/2)}=UH\psi^{(1/2)} \tag{8.29}$$

である．しかし $\psi^{(1/2)}$ は2次元のアイソ空間でまったく任意の波動関数であるから，この空間のすべての状態に対して

$$HU-UH=0, \qquad もしくは \qquad [H,\ U]=0 \tag{8.30}$$

である．特に無限小の U に対し

$$[H,\ \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}]=0 \tag{8.31}$$

であり，それぞれの ε_i は任意であるから

$$[H,\ \boldsymbol{\tau}]=0 \tag{8.32}$$

を得る．しかし U は Hermite 的で可能な観測量に対応するから，式(8.32)はその固有値が運動の恒量（保存量）であるという主張である．式(8.30) はまた

$$UHU^{-1}=H \tag{8.33}$$

とも書け，H が変換(8.25)のもとで不変であることを示す．すなわち，これら運動の恒量の存在は，対応する変換に対する H の不変性の結果である．

もちろん，τ_i はそれらの間で可換でないから，同時にひとつ以上の τ_iに確定した値を与えることはできない．交換関係(8.20) を与えた上で，式(8.32) を最大限に利用するように状態を分類する問題は，角運動量の理論でよく知られている．[†] すなわち“スピン”の2乗の大きさ

$$(\mathbf{T}^{(1/2)})^2\equiv\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\right)^2=\frac{1}{4}({\tau^2}_1+{\tau^2}_2+{\tau^2}_3) \tag{8.34}$$

とその一成分，例えば $T_3^{(1/2)}=\dfrac{1}{2}\tau_3$ は同時に確定した値を取ることができる．対応する固有関数はもちろん $\chi_p^{(1/2)}$ と $\chi_n^{(1/2)}$（式(8.21 a)，(8.21 b)参照）である．したがって2つの縮退したエネルギー固有値は $\boldsymbol{\tau}^2$ と τ_3 の固有値で指定される．

今まででは，1粒子問題に対する入念な定式化にすぎない．実際に興味ある物理は，数個の核子をアイソスピンの見地から考察するときに出てくる．核の中の A 個の核子に対し全アイソスピンの演算子を

† (原注)例えば Gasiorowicz（1966，1974）参照

$$\mathbf{T}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_2+\cdots+\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_A \tag{8.35}$$

で定義する．系を記述するハミルトニアンはおそらくすべての核子に対して独立に変換(8.33) のもとで不変である．したがって

$$[H,\ \mathbf{T}]=0 \tag{8.36}$$

となる．演算子 $\mathbf{T}$ の固有値は運動の恒量である．さらに，異なる核子に対してアイソスピンの演算子は互いに交換するから（まったく独立な自由度である），それぞれの $\boldsymbol{\tau}$ に対する交換関係から

$$[T_i,\ T_j]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}T_k \tag{8.37}$$

がでる．核のエネルギー準位は，電磁効果とわずかな中性子・陽子の質量差を補正して，$\mathbf{T}^2$ と T_3 の固有値で指定できるはずである．再びこれは交換可能な演算子の最大集合である．これらの固有値は，仮定したアイソスピン不変性が正しければ，よい近似で“よい量子数”になるはずである．

それでは可能な固有値は何であろうか．再びこれは角運動量の場合と同じ結果を与える．$\mathbf{T}$ は角運動量と正確に同じ交換関係(8.37) を満たすからである．$\mathbf{T}^2$の固有値は $T(T+1)$ の形を取り，$T=0,\ 1/2,\ 1\cdots$である．T が与えられたとき T_3 の固有値は $-T,\ -T+1,\ \cdots\ T-1,$ であり，ひとつの T の値に対し $(2T+1)$ 個の縮退した状態が存在する．これらの状態は同じ A（核子数）の値を持ち，T_3 は陽子ひとつひとつに対して $+1/2$，中性子ひとつひとつに対して $-1/2$ の値を与える．T_3の値がひとつ増減することは物理的に中性子が陽子に変わること，あるいはその逆に相当する．したがって相隣る核同重体の間に，準位の“荷電多重項”が見られると期待できる．まさにこれがすでに第 1 章であげた多重項の例である．便宜をはかって図 1.8 を図 8.2 に再録しておいた．準位の系列は（Coulomb エネルギーの差と中性子・陽子の質量差について補正ずみ)，明らかに $T=1/2$（2 重項)，$T=1$（3 重項）および $T=3/2$（4 重項）が存在する証拠になっている．重要な注意であるが，同じ T に属する多重項は同じ J^P 量子数を持たなくてはならない．(準位図の中に記してある.) 明らかに核力は核子の空間およびスピンの自由度に依存し，活動関数の空間・スピン部分が同じときに限って，異なる核子間でも核力が同じになるからである．

したがって，核力にこの不変性を仮定すると，もともとの n-p 2 重項よりずっ

と複雑な核の多重子構造が表れることになる．これら高次元の多重子（$T=1$, $3/2$ ……）は SU(2) の“既約表現”と呼ばれる．交換関係(8.37) は SU(2) のLie代数と呼ばれ，SU(2) のすべての可能な多重子構造をみいだす一般的な群論の問題は，これらの交換関係を満たす行列を見いだす問題と等価である．実際，正確に（$2T+1$）行（$2T+1$）列の角運動量の行列が存在する．これは $\boldsymbol{\tau}$ の一般化であって，$\boldsymbol{\tau}$ 自身は $T=1/2$ に対応する．例えば $T=1$ の行列は 3 行 3 列で，その要素を簡潔に表せば

$$(T_i^{(1)})_{jk} = -\mathrm{i}\varepsilon_{ijk} \tag{8.38}$$

である（問題 8.1 参照）．ここで ε_{ijk} はわざと式(8.37) の代数を特定するのと同

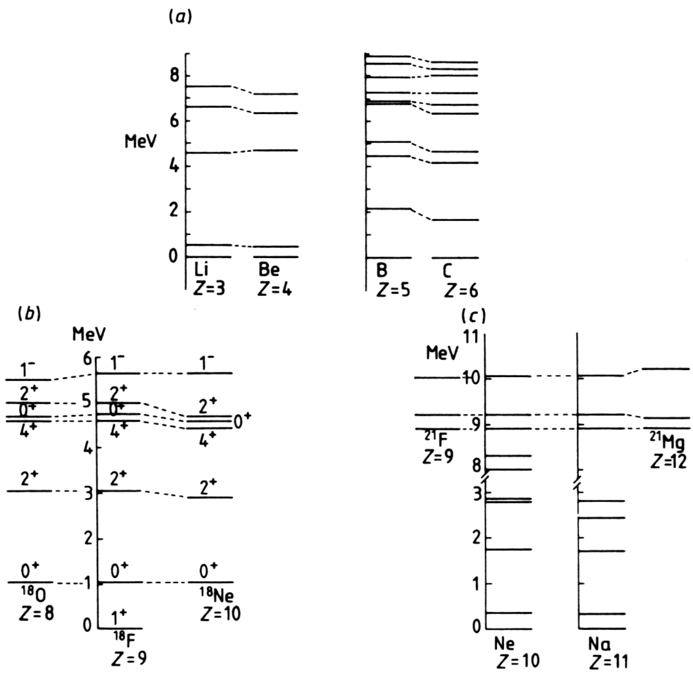


図 8.2　同じ質量と異なる電荷を持つ原子核のエネルギー準位（静電エネルギーと中性子・陽子の質量差については調整してある）(a) は“鏡映核”を表す 2 重子，(b) は 3 重子，(c) は 2 重子および 4 重子を表す

じ数に選んだ．この数を SU(2) 群の構造定数という．一般に，交換関係(8.37)を満たす $(2T+1)$ 行 $(2T+1)$ 列の行列 $\mathbf{T}^{(T)}$ と式(8.5) の 2 次元の場合 $(T=1/2)$ と類似な $(2T+1)$ 次元の対応する波動関数 $\psi^{(T)}$ が存在する．したがって式(8.25) を高次元多重子に拡張すると

$$\psi^{(T)\prime}=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T}^{(T)})\psi^{(T)} \tag{8.39}$$

である．行列 $\mathbf{T}^{(T)}$ を無限小 SU(2) 変換の生成演算子(ジェネレーター)という．

さて素粒子物理学におけるアイソスピンに目を転じよう．中性子および陽子状態自身は，第 1 章に記したとおり（図 1.10(a) 参照)，実はある準位系列の基底状態にすぎない．図 1.10(b) に示すように，もうひとつのバリオンの系列は 4 つの荷電状態を持つ．また図 1.11 に示すように，中間子の分野では，π は 3 重子系列のもっともエネルギーの低い状態として現れる．このほかの例もたくさん存在する．これらの事実のもっとも自然な解釈は，原子核の場合と同じく，観測された状態は異なる電荷を持つさらに基本的な粒子の複合状態であり，それらの粒子間の力が荷電不変であるということである．これらの基本粒子はもちろんクォークであって，n は(udd)，p は(uud)，Δ は(uuu, uud, udd, ddd)を含む．u/d の自由度はクォーク段階における SU(2) アイソスピン・フレイバー対称性と呼ぶものである．しかし，この簡単な構成クォーク模型は，$T=2$ あるいはそれ以上の T の値を持つ重粒子や中間子の状態は存在しない，と予言することに注意せよ．

実は，ストレンジ粒子を非ストレンジ粒子とひとまとめにすると，より大きいハドロンの多重子構造が存在する．Gell-Mann (1961) および Ne'eman (1961)（ほかに Gell-Mann & Ne'eman (1964) 参照）は，SU(2) フレイバー対称性の正しい拡張は SU(3) であることを発見している．u, d, s クォークは SU(3) の“基礎” 3 次元表現として変換し，核子は 8 次元表現に，Δ などは 10 次元表現に属する．3 つのクォーク・フレイバーは式(8.5) の 3 次元への拡張

$$\psi=\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \tag{8.40}$$

にあてはまり，これらの状態間のユニタリー変換は

$$\psi'=\mathbf{U}\psi \tag{8.41}$$

と書かれる．ここに $\mathbf{U}$ は3行3列で行列式が1のユニタリー行列である．このような行列の集合は SU(3) 群をなす．無限小 SU(3) 行列は

$$\mathbf{U}=\mathbf{1}+\mathrm{i}\boldsymbol{\chi} \tag{8.42}$$

の形を持ち，$\boldsymbol{\chi}$ は3行3列の跡がゼロの Hermite 行列である．このような行列は8個の独立なパラメーターを持ち，

$$\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\lambda}/2 \tag{8.43}$$

と書かれる．ここに $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ \cdots\cdots\eta_8)$ で，$\boldsymbol{\lambda}$ は式(8.19)の $\boldsymbol{\tau}$ 行列を拡張した8個の行列である．これらは3次元表現の SU(3) の生成演算子であり，その交換関係

$$\left[\frac{1}{2}\lambda_i,\ \frac{1}{2}\lambda_j\right]=\mathrm{i}f_{ijk}\cdot\frac{1}{2}\lambda_k \tag{8.44}$$

は SU(3) の代数を定義する．λ 行列は付録 E に与えてあり，構造定数 f_{ijk} は例えば Gibson & Pollard (1976) の書物に載っている．クォーク3重子の有限 SU(3) 変換は

$$\psi'=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda}/2)\psi \tag{8.45}$$

となり（式(8.25) 参照)，再び“一般化された位相変換”の性格を持つが，今度は8個の“位相角”を含む．高次元の表現は，核のアイソスピンの場合と同じように，数個のクォークの系の波動関数を考え，例えば重粒子族を収容できるように作り上げてゆくことができる．

ストレンジネス量子数が異なる SU(3) 多重子の成員間の質量の違いは，かなり大きい ($m_{\mathrm{K}}-m_\pi\sim 350$ MeV，$m_\Sigma-m_{\mathrm{N}}\sim 250$ MeV)．このような違いは本質的にはストレンジ・クォークと非ストレンジ・クォークの質量差 m_s-m_{u} に帰せられ，クォーク間の力（第9章参照）はフレイバーによらないと信じられている．これ以外のフレイバー (c, b, t ?, ? ……) も存在するが，質量差が非常に大きくなるので，SU(4) ……などの高いフレイバーの群を考えても一般には役に立たない．フレイバー SU(3) とそのハドロン分光学への応用については，例えば Close (1979) や Lichtenberg (1978) の書物に詳しく論じられている．

8.2　ラグランジアンを用いる場の量子論における非可換大局的対称性

すでに第4章で明らかになりかけたと思うが，ラグランジアンに基づく場の

量子論は，対称性の記述に特に適した定式化である．精緻な一般論に入ることなく，大局的アイソスピン対称性が容易に理論になじむことをいくつかの例で示そう．これは 4.4 節, 4.5 節で考察した U(1) 対称性を簡単な方法で一般化したものである．これはまた局所的（ゲージ）変換への道を準備することになる．

例えばラグランジアン

$$\hat{\mathscr{L}} = \bar{\hat{\psi}}_{\mathrm{u}}(\mathrm{i}\not\partial - m)\hat{\psi}_{\mathrm{u}} + \bar{\hat{\psi}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{i}\not\partial - m)\hat{\psi}_{\mathrm{d}} \tag{8.46}$$

を考えよう．"u" および "d" は同じ質量 m を持つ自由なフェルミオンである．ラグランジアン $\hat{\mathscr{L}}$，したがってハミルトニアン $\hat{\mathscr{H}}$ も確かに SU(2) ユニタリー変換

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}'_{\mathrm{u}} \\ \hat{\psi}'_{\mathrm{d}} \end{pmatrix} = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\begin{pmatrix} \hat{\psi}_{\mathrm{u}} \\ \hat{\psi}_{\mathrm{d}} \end{pmatrix} \tag{8.47}$$

のもとで不変である．(式(8.25)参照，符号の違いについては U(1) の場合の 4.4 節参照) ここに $\boldsymbol{\alpha}$ は定数で，2 重子の状態 $|T=1/2,\ T_3=\pm 1/2\rangle$ は $\hat{\psi}_{\mathrm{u}}^{\dagger}$，$\hat{\psi}_{\mathrm{d}}^{\dagger}$ を $|0\rangle$ に働かせて得られる．これに伴う保存量は何であろうか．4.4 節の大局的 U(1) 対称性の場合，保存量 $\hat{N}$ は変換 $\hat{\psi} \to \hat{\psi}'$ を起こすユニタリー演算子 $\hat{U}$

$$\hat{\psi}' = \hat{U}\hat{\psi}\hat{U}^{-1} \tag{8.48}$$

$$\hat{\psi}' \approx (1-\mathrm{i}\varepsilon)\hat{\psi}, \qquad \hat{U} \approx 1+\mathrm{i}\varepsilon\hat{N}, \qquad [\hat{N},\ \hat{\psi}] = -\hat{\psi} \tag{8.49}$$

の指数冪として現れた．今度の場合，ただひとつのパラメーターは 3 つの $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)$ になっており，明らかに $\hat{N}$ の類推として 3 つの $\hat{N}$ があるであろう．無限小変換に対して

$$\hat{\psi}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{\mathrm{u}} \\ \hat{\psi}_{\mathrm{d}} \end{pmatrix} \tag{8.50}$$

$$\hat{\psi}^{(1/2)\prime} = \hat{U}\hat{\psi}^{(1/2)}\hat{U}^{\dagger} \tag{8.51}$$

$$\psi^{(1/2)\prime} \approx (1-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\psi^{(1/2)}, \qquad \hat{U} \approx 1+\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)} \tag{8.52}$$

と書けば，3 つの演算子 $\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}$ は Hermite 的であり $\hat{U}$ はユニタリーである．したがって

$$(1+\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)})\hat{\psi}^{(1/2)}(1-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}) = (1-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\hat{\psi}^{(1/2)} \tag{8.53}$$

の要請から

$$[\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)},\ \hat{\psi}^{(1/2)}] = -(\boldsymbol{\tau}/2)\hat{\psi}^{(1/2)} \tag{8.54}$$

が得られる(問題 8.2 参照)．さてこれを満たす演算子 $\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}$ を見いだす必要があるが，答えは

$$\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)} = \int \hat{\psi}^{(1/2)\dagger}(\boldsymbol{\tau}/2)\hat{\psi}^{(1/2)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{8.55}$$

である．これは $\hat{\psi}$ の反交換関係を用いて検証される（問題 8.3)．“$\boldsymbol{\tau}/2 \to 1$”と置き換えれば式(8.55) は再びu，d の粒子数演算子の和となり，単一パラメーターの U(1) の場合に帰着される．これら $\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}$ が実際にハミルトニアン $\hat{H}$ と交換し，したがってその固有値が保存するかどうか

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}/\mathrm{d}t = -\mathrm{i}[\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)},\ \hat{H}] = 0 \tag{8.56}$$

検証することができる．演算子 $\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}$ はもちろん，$T=1/2$ の場合に応じたアイソスピン演算子の場の理論における実現にほかならないから，SU(2) 代数

$$[\hat{T}_i,\ \hat{T}_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{T}_k \tag{8.57}$$

にしたがう（問題 8.4)．U(1) の場合はさらに一歩進めて，保存する演算子（すなわち $\hat{Q}_{\mathrm{em}}$ を保存するカレントに結びつけることができた．

$$\hat{Q}_{\mathrm{em}} = \int \hat{j}^0_{\mathrm{em}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \qquad \hat{j}^\mu_{\mathrm{em}} = e\,\bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi} \tag{8.58}$$

$$\partial_\mu \hat{j}^\mu_{\mathrm{em}} = 0 \tag{8.59}$$

式(8.55) に対する自明な一般化は

$$\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)} = \int \hat{\boldsymbol{j}}^{0(1/2)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \qquad \hat{\boldsymbol{j}}^{(1/2)\mu} = \bar{\hat{\psi}}^{(1/2)}\gamma^\mu(\boldsymbol{\tau}/2)\hat{\psi}^{(1/2)} \tag{8.60}$$

である．実際，運動方程式から

$$\partial_\mu \hat{\boldsymbol{j}}^{(1/2)\mu} = 0 \tag{8.61}$$

を証明することができ，$\hat{\boldsymbol{j}}^{(1/2)\mu}$ は $T=1/2$ の (ũ，d) 系についての保存するアイソスピン・カレントの演算子である．

以上述べたことをすべてより能率よく取り扱う一般的な定式化があるはずで，それは U(1) の場合に式(4.139)～(4.146) で展開した各段階の一般化として得られる．ラグランジアン $\mathscr{L}$ が一組の場 ψ_r（ボソンでもフェルミオンでもよい）を含み，かつ場が微小変換

$$\delta\hat{\psi}_r = -\mathrm{i}\varepsilon T_{rs}\hat{\psi}_s \tag{8.62}$$

のもとで不変とする．T_{rs} はある数係数の集りである．式(8.62) は式(4.140) の一般化である．$\mathscr{L}$ はこの変化に対して不変であるから

$$0=\delta\hat{\mathscr{L}}=\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{\psi}_r}\delta\hat{\psi}_r+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial^\mu\hat{\psi}_r)}\partial^\mu(\delta\hat{\psi}_r) \tag{8.63}$$

である．しかし運動方程式

$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\hat{\psi}_r}=\partial^\mu\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial^\mu\hat{\psi}_r)}\right) \tag{8.64}$$

が成り立つから式(8.63) は

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial^\mu\hat{\psi}_r)}\delta\hat{\psi}_r\right)=0 \tag{8.65}$$

と書け，これはまさにカレントの保存則

$$\partial^\mu\hat{j}_\mu=0 \tag{8.66}$$

である．実際，問題にならない小さな定数パラメーター ε をとり除けば，保存するカレントは

$$\hat{j}_\mu=-\mathrm{i}\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial^\mu\hat{\psi}_r)}T_{rs}\hat{\psi}_s \tag{8.67}$$

である．

この方式をラグランジアン(8.46) に応用してみよう．記法を濃縮して

$$\hat{\mathscr{L}}=\bar{\hat{\psi}}^{(1/2)}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m)\hat{\psi}^{(1/2)} \tag{8.68}$$

$$\delta\hat{\psi}^{(1/2)}=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\hat{\psi}^{(1/2)} \tag{8.69}$$

と書く．すでに見たように，今度は 3 つの ε と 3 つの T_{rs}，すなわち $1/2(\tau_1)_{rs}$，$1/2(\tau_2)_{rs}$，$1/2(\tau_3)_{rs}$ がある．そのそれぞれにカレント

$$\hat{j}^{(1/2)}_{1\mu}=-\mathrm{i}\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial(\partial^\mu\hat{\psi}^{(1/2)})}\frac{\tau_1}{2}\hat{\psi}^{(1/2)}=\bar{\hat{\psi}}^{(1/2)}\gamma_\mu\frac{\tau_1}{2}\hat{\psi}^{(1/2)} \tag{8.70}$$

がある．ほかの τ に対しても同様で，式(8.60) が再び出る．ラグランジアンの変換(8.69) に対する不変性から，関連する対称性のカレントの保存がでてくる．これは Noether の定理の場の量子論版である．

この定理は基本的に重要である．対称性（式(8.62) のような一般的な形を持つ変換）がどう“カレント”の保存則（式(8.66)）と結びついているか，定理が実際のカレントをどう与えるか示しているからである．ゲージ理論では，対称性は<u>力学</u>を生み出す．電磁気学の局所的 U(1) 変換で見たように，対称性のカレントはそのまま力の場の中の運動を実現する力学的カレントになっているのである．ラグランジアンの対称性は，ゲージ諸理論の基礎になっている．

スピン-0の場を含むもうひとつの例を考察しよう．同じ質量を持つ3個のスピン-0の場があるとし，ラグランジアン $\hat{\mathscr{L}}$ を

$$\hat{\mathscr{L}}=\frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_2+\frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_3\partial^\mu\hat{\phi}_3-\frac{1}{2}m^2(\hat{\phi}_1^2+\hat{\phi}_2^2+\hat{\phi}_3^2) \tag{8.71}$$

ととる．明らかに，ϕ をそれらの間で任意に回転しても $\hat{\mathscr{L}}$ は不変である．これは4.4節の $\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2$ 系を“第3軸のまわりに回転”することの拡張である．無限小のそのような回転は

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}'=\hat{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{8.72}$$

で，書き換えれば

$$\delta\hat{\phi}_r=-\mathrm{i}\varepsilon_a T^{(1)}_{ars}\hat{\phi}_s \tag{8.73}$$

$$T^{(1)}_{ars}=-\mathrm{i}\varepsilon_{ars} \tag{8.74}$$

と表される．もちろん再び3つの $\mathbf{T}$ があり，式(8.38)にもどれば，これらはまさに $T=1$ のアイソスピン行列 $(T_a{}^{(1)})_{rs}$ である．明らかにこれは3つの $(2\times1+1)$ 一次元の SU(2) 表現 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ にふさわしい．この場合保存するカレントの $a=1$ 成分は，式(8.67) より

$$\hat{j}_1^{(1)\mu}=\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_3-\hat{\phi}_3\partial^\mu\hat{\phi}_2 \tag{8.75}$$

である．添字を循環させるとほかの成分が出る．その結果は一括して

$$\hat{\boldsymbol{j}}^{(1)\mu}=\mathbf{i}(\tilde{\hat{\phi}}^{(1)}\mathbf{T}^{(1)}\partial^\mu\hat{\phi}^{(1)}-(\partial^\mu\phi^{(1)})\mathbf{T}^{(1)}\hat{\phi}^{(1)}) \tag{8.76}$$

と書ける．ここで

$$\hat{\phi}^{(1)}=\begin{pmatrix}\hat{\phi}_1\\ \hat{\phi}_2\\ \hat{\phi}_3\end{pmatrix} \tag{8.77}$$

と書き，～は転移行列を表す．式(8.76) はボソンのスピン -0 カレントに期待される形であるが，行列 $\mathbf{T}^{(1)}$ が現れている．

このような SU(2) カレントの一般形はもはや明らかであろう．ボソンに対しては

$$\mathrm{i}(\hat{\phi}^{(T)\dagger}\mathbf{T}^{(T)}\partial^\mu\hat{\phi}^{(T)}-(\partial^\mu\hat{\phi}^{(T)})^\dagger\mathbf{T}^{(T)}\hat{\phi}^{(T)}) \tag{8.78}$$

の形で，複素場にも使えるよう†を付しておいた．フエルミオンに対しては

$$\bar{\hat{\psi}}^{(T)}\gamma^\mu\mathbf{T}^{(T)}\hat{\psi}^{(T)} \tag{8.79}$$

の形をとる．いずれの場合も $\hat{\phi}$ または $\hat{\psi}$ は SU(2) のもとで $(2T+1)$ 多重子と

して変換する．

$$\widehat{\psi}^{(T)\prime}=\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T}^{(T)})\widehat{\psi}^{(T)} \tag{8.80}$$

$\widehat{\phi}^{(T)}$ に対しても同様である．電弱理論は式(8.78)をゲージ不変にした形を用いている．そのとき $\widehat{\phi}$ は弱いアイソスピノールの Higgs 場である（後述，14.4節）．

ここにあからさまに論じた諸例はすべて自由な場の理論であった．しかし SU(2) 不変な相互作用は容易に作ることができる．例えば，相互作用 $\frac{1}{2}\bar{\widehat{\psi}}\boldsymbol{\tau}\widehat{\psi}\cdot\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ は，$T=1/2$ アイソスピノール $\widehat{\psi}$ と，$T=1$ アイソベクトル $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ の間の SU(2) 不変な相互作用である．幾何学的な類推により，“内積”は不変であることがわかる．同様に，上の相互作用はほかの内部対称群に対して一般化することができる．SU(3) ならば単に“T”をしかるべき生成演算子“G”で置き換えればよい．

8.3　局所的非可換位相不変性，非可換ゲージ理論

大局的 SU(2)アイソスピノール変換

$$\psi^{(1/2)\prime}=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\psi^{(1/2)} \tag{8.81}$$

を考えよう．ここで再び普通の波動関数にもどる．この変換のもとでの不変性は，2つの基礎状態のどちら（(u，d) のどちら，(n，p) のどちら）を用いても単に便宜の問題にすぎないという主張である．ある一対に非可換位相変換を行っても，まったく同じくらい有用な一対になる．しかし，すべての時空点で独立に選択をすることはできず，大局的にのみ可能である．Yang & Mills (1954)（第3部のはじめの引用を参照）には，これは対称性の美しさを損う制約と思われた．“いったんある時空点で何を陽子，何を中性子と呼ぶか決めてしまうと，ほかの時空点でほかのとり方をする自由度が失われてしまう”．彼らはさらにこれは“局所場の概念と相入れない”とみ，したがってこの（時空間の座標によらない）大局的な位相変換を（時空間の座標による）局所的な位相変換

$$\psi^{(1/2)\prime}=\exp[\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)/2]\psi^{(1/2)} \tag{8.82}$$

で置き換える“可能性を探った”のであった．ここで位相のパラメーター $\boldsymbol{\alpha}(x)$ は $x=(t,\ \boldsymbol{x})$の関数である．指数の中にパラメーター g を挿入して，電磁場の

U(1) 変換の場合

$$\psi'=\exp[\mathrm{i}q\chi(x)]\psi \tag{8.83}$$

との強い類推をとったことに注意せよ．g は電磁的な荷量 q に対応する．変換(8.82) に基づいた理論を調べることが Yang & Mills (1954) の基本的な一歩であった．また Shaw (1955) を参照せよ．

しかし，この章のはじめに述べたように，フレイバー対称群 SU(2) を“局所化”してハドロン相互作用の理論を作ろうとする試みは，現象論的には実を結ばないことが判明してしまった（この着想をさらに推進しようとした桜井(1960) のめざましい試みにもかかわらず）．結局，局所的 SU(2) 対称性の応用は弱い相互作用で成功した．しかしこの対称性は“隠れて”いるという事実が問題を複雑にしているので，議論を QCD のあとまで延ばすことにする．QCD は強い相互作用の理論であるが，複合粒子（ハドロン）ではなくクォークの階層で成り立つものである．QCD は SU(3) 対称性の局所的な形に基づくが，これは 8.1 節のフレイバー SU(3) ではなく，まったく新しい自由度カラーに関する対称性であることを繰り返しておく．QCD は第 9 章で紹介する．

局所的 SU(2) 対称性の弱い相互作用への応用は，局所的 SU(3) 対称性を強い相互作用に適用したあとで行うつもりだが，群論が簡単でかつなじみ深いからここで局所的 SU(2) 対称性について論じておく．この節では，変換(8.82)に対する不変性の要求から生ずる非可換 SU(2) ゲージ理論について，その主要な考え方を初等的に論ずる．物理的な状態や演算子を引き合いに出すときには一般にアイソスピンの言葉を用いるが，これは最終的には弱いアイソスピンをさすことを忘れないでおこう．

2.4 節，2.5 節の電磁的ゲージ（位相）不変性の議論に，できるだけ文字どおりにまねることにする．再び，自由粒子の波動方程式は変換

$$\psi^{(1/2)\prime}=\exp[\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)/2]\psi^{(1/2)} \tag{8.84}$$

のもとで共変にはなりえない．方程式の中の微分項が位相 $\boldsymbol{\alpha}(x)$ に働くからである．しかし，しかるべく定義された共変微分については波動方程式は共変になりうる．物理的に言えばこれは，電磁場の場合と同じように，局所的非可換位相不変性は，ある確定した力の場の導入を要求する，ということである．電磁場の場合，共変微分は

$$D^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu(x) \tag{8.85}$$

であった．上の局所的 SU(2) 変換にふさわしい共変微分は

$$D^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu(x)/2 \tag{8.86}$$

である．この演算子は 2 成分のアイソスピノール $\psi^{(1/2)}$ に働き，∂^μ には 2 行 2 列の単位行列がかかっていると解釈する．$\boldsymbol{W}^\mu(x)$ は 3 個の独立なゲージ場

$$\boldsymbol{W}^\mu = (W_1^\mu,\ W_2^\mu,\ W_3^\mu) \tag{8.87}$$

を表し，これは電磁場 A^μ の一般化である．W^μ を SU(2) ゲージ場，あるいはより一般に Yang-Mills 場という．$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu$ 項は $\psi^{(1/2)}$ に働く 2 行 2 列の行列

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu = \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - \mathrm{i}W_2^\mu \\ W_1^\mu + \mathrm{i}W_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \tag{8.88}$$

である．

さて以上の処方がうまくゆくことを確める．電磁場の例（式(2.32)）との類推から，鍵になる関係式は

$$(D'^\mu\psi^{(1/2)\prime}) = \exp[\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)/2](D^\mu\psi^{(1/2)}) \tag{8.89}$$

である．さて局所的なパラメーター $\boldsymbol{\eta}(x)$ を含む無限小[†]変換を考える．上の式の左辺は

$$D'^\mu\psi^{(1/2)\prime} = (\partial^\mu + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}'^\mu/2)[1 + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)/2]\psi^{(1/2)} \tag{8.90}$$

である．一方右辺は

$$[1 + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)/2](\partial^\mu + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu/2)\psi^{(1/2)} \tag{8.91}$$

となる．ここで 3 つの場 $\boldsymbol{W}^\mu$ に要求される変換を決定するため，これら 2 つの表式が等しいという条件を課す．この無限小変換で $\boldsymbol{W}^\mu$ が

$$\boldsymbol{W}^\mu \to \boldsymbol{W}'^\mu = \boldsymbol{W}^\mu + \delta\boldsymbol{W}^\mu \tag{8.92}$$

のように変わったとすると，等しいという条件は

$$[\partial^\mu + \mathrm{i}g(\boldsymbol{\tau}/2)\cdot(\boldsymbol{W}^\mu + \delta\boldsymbol{W}^\mu)]\cdot[1 + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)/2]\psi^{(1/2)}$$
$$= [1 + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)/2](\partial^\mu + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu/2)\psi^{(1/2)} \tag{8.93}$$

となる．演算を行い，微小量 $\delta\boldsymbol{W}^\mu$ と $\boldsymbol{\eta}$ の積を含む 2 次のけたの項を省略し，

[†]（原注）代数が非常に簡単になる．

$$\partial^\mu(\boldsymbol{\eta}\psi)=(\partial^\mu\boldsymbol{\eta})\psi+\boldsymbol{\eta}(\partial^\mu\psi) \tag{8.94}$$

に注意すれば，たくさんの項が打ち消しあって最後に

$$\mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{W}^\mu}{2}=-\mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\eta}(x)}{2}+(\mathrm{i}g)^2\left[\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu}{2}\right)-\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)}{2}\right)\right] \tag{8.95}$$

が残る．Pauli 行列のよく知られた恒等式（問題 3.2 (b) 参照）

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{8.96}$$

を用いて，これは

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\delta W}^\mu=\boldsymbol{\tau}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\eta}(x)-g\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\eta}(x)\times\boldsymbol{W}^\mu) \tag{8.97}$$

と書ける．両辺の成分を等しいとおけば

$$\boxed{\boldsymbol{\delta W}^\mu=-\partial^\mu\boldsymbol{\eta}(x)-g[\boldsymbol{\eta}(x)\times\boldsymbol{W}^\mu(x)]} \tag{8.98}$$

を得る．

これが SU(2) ゲージ場 $\boldsymbol{W}^\mu(x)$ が無限小局所 SU(2) ゲージ変換のもとで変換する仕方である．手本にした電磁的ゲージ場 $A^\mu(x)$ の変換法則

$$A^\mu\to A'^\mu=A^\mu-\partial^\mu\chi \tag{8.99}$$

より得られる

$$\delta A^\mu=-\partial^\mu\chi \tag{8.100}$$

とこれを比べてみよ．この式は $\boldsymbol{\delta W}^\mu$ の第 1 項と直接対応する．$\boldsymbol{W}^\mu$ と $\boldsymbol{\eta}$ の 3 つの成分が，3 つの無限小の χ にあたる．$\boldsymbol{\delta W}^\mu$ の中の第 2 項の重要な意味は，3 つのゲージ場 $\boldsymbol{W}^\mu$ は SU(2) の 3 重項表現，すなわちアイソスピン 1 の場を作る，ということである．これを証明するために，SU(2) 3 重子が<u>大局的</u> SU(2) 変換（8.2 節参照）のもとでどう変換するか考えよう．式 (8.39) を用いて

$$\psi^{(1)\prime}=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T}^{(1)})\psi^{(1)} \tag{8.101}$$

とおく．ここで行列 $\mathbf{T}^{(1)}$ はあからさまに

$$(T_i^{(1)})_{jk}=-\mathrm{i}\varepsilon_{ijk} \tag{8.38}$$

で与えられることはすでに論じた．のちの便宜のため因子 g を挿入した無限小 SU(2) 変換 $\boldsymbol{\eta}$ のもとで，場の SU(2) 3 重項

$$\psi^{(1)}=\begin{pmatrix}\psi_1^{(1)}\\ \psi_2^{(1)}\\ \psi_3^{(1)}\end{pmatrix} \tag{8.102}$$

は

$$\psi^{(1)\prime}=(1+\mathrm{i}g\mathbf{T}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\eta})\psi^{(1)} \tag{8.103}$$

のように変換する．あるいは成分で書けば

$$\psi_i^{(1)\prime}=(1+\mathrm{i}gT_k^{(1)}\eta_k)_{ij}\psi_j^{(1)} \tag{8.104}$$

である．したがって式(8.38) の $T_k^{(1)}$ のあからさまな形を用いて

$$\delta\psi_i^{(1)}\equiv\psi_i^{(1)\prime}-\psi_i^{(1)}=\mathrm{i}g\eta_k(-\mathrm{i}\varepsilon_{kij})\psi_j^{(1)} \tag{8.105}$$

となり，ε_{ijk} の反対称性より

$$\delta\psi_j^{(1)}=-g\varepsilon_{ikj}\eta_k\psi_j^{(1)} \tag{8.106}$$

を得る．ベクトルの形で書けば

$$\delta\psi^{(1)}=-g(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\psi}^{(1)}) \tag{8.107}$$

で，まさに $\boldsymbol{\delta W}^\mu$ の第 2 項の形をしている．

まとめ：無限小 SU(2) 変換に対して関係式

$$(D^{\mu\prime}\psi^{(1/2)\prime})=[1+\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)/2](D^\mu\psi^{(1/2)}) \tag{8.108}$$

が成り立つ．D^μ は式(8.86)で与えられる．このとき $\psi^{(1/2)}$ は無限小局所 SU(2) 位相変換

$$\psi^{(1/2)\prime}=[1+\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)/2]\psi^{(1/2)} \tag{8.109}$$

に従うほか，ゲージ場 $\boldsymbol{W}^\mu$ は

$$\boldsymbol{W}'^\mu=\boldsymbol{W}^\mu-\partial^\mu\boldsymbol{\eta}(x)-g[\boldsymbol{\eta}(x)\times\boldsymbol{W}^\mu] \tag{8.110}$$

に従って変換する．

これらの結果を得るにあたり，共変微分(8.86) の形を仮定し，変換(8.84) の無限小の形しかあからさまに用いなかった．共変微分(8.86) は有限な（無限小でない）変換(8.84) に対しても成り立つが，ゲージ場に対する変換法則は変換(8.110) より多少複雑になることがわかっている．その変換は必要でないから，ここで導くことは行わない．共変微分の形

$$D^{\mu}=\partial^{\mu}+\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}(x)/2 \tag{8.86}$$

を用い，有限な $\boldsymbol{\alpha}(x)$ に対する関係式

$$D^{\mu\prime}\psi^{(1/2)\prime}=\exp[\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)/2](D^{\mu}\psi^{(1/2)}) \tag{8.111}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{W}^{\mu}$ はしかるべき有限な変換則を満たす．

さて今度は $\psi^{(1/2)}$ に対する Dirac 方程式

$$(\mathrm{i}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}-m)\psi^{(1/2)}=0 \tag{8.112}$$

を考えよう．“アイソスピノール”$\psi^{(1/2)}$ の 2 つの成分は，(時空間の)4 成分 Dirac スピノールである．この自由場の方程式で ∂^{μ} を共変微分 D^{μ}

$$D^{\mu}=\partial^{\mu}+\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu}/2 \tag{8.86}$$

で置き換えれば，局所的 SU(2) 共変性を保証することができる．それには有限な変換

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}(x))\equiv\exp[\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)/2] \tag{8.113}$$

に対して式(8.84)，(8.111) を用いて

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}(x))[\mathrm{i}\gamma_{\mu}D^{\mu}-m]\psi^{(1/2)}&=\mathrm{i}\gamma_{\mu}\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}(x))(D^{\mu}\psi^{(1/2)})-m\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}(x))\psi^{(1/2)}\\&=\mathrm{i}\gamma_{\mu}D^{\prime\mu}\psi^{(1/2)\prime}-m\psi^{(1/2)\prime}\end{aligned} \tag{8.114}$$

を導く．したがって

$$(\mathrm{i}\gamma_{\mu}D^{\mu}-m)\psi^{(1/2)}=0 \tag{8.116}$$

であれば

$$(\mathrm{i}\gamma_{\mu}D^{\prime\mu}-m)\psi^{(1/2)\prime}=0 \tag{8.115}$$

となり，主張していた共変性の証明ができる．同様にして，“アイソスピノール”$\psi^{(1/2)}$ の満たす任意の自由粒子の方程式 ― 方程式は粒子の Lorentz（時空）スピンによってきまる ― は，共変微分 D^{μ} を用いて局所的に共変にすることができる．

もちろんここで本質的な点は，局所的に共変な形は $\psi^{(1/2)}$ とゲージ場 $\boldsymbol{W}^{\mu}$ の間の相互作用を含むことである．相互作用は局所的な位相不変の要求(“ゲージ原理”) から決まる．実際，SU(2) ゲージ理論の枝線図形に使える Feynman 規則をすでに見いだしはじめているのである．SU(2) アイソスピノールのフェルミオンの場合 $\psi^{(1/2)}$ を考えよう．方程式は

$$(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi^{(1/2)}=g(\boldsymbol{\tau}/2)\cdot\boldsymbol{W}\psi^{(1/2)} \tag{8.117}$$

である．最低次の摂動論では，W 粒子を 1 個放出/吸収する過程の振幅は（電

磁気の場合の式(6.22) 参照)

$$-\mathrm{i}\int \bar{\psi}_{\mathrm{f}}^{(1/2)} g(\boldsymbol{\tau}_r/2) \boldsymbol{W}^r \psi_{\mathrm{i}}^{(1/2)} \mathrm{d}^4 x \tag{8.118}$$

で与えられる．$\boldsymbol{\tau}$ の行列としての自由度は 2 成分アイソスピノール $\psi^{(1/2)}$ で挾まれており，$\boldsymbol{W}$ の中の γ 行列は $\psi^{(1/2)}$ の（時空の Dirac）4 成分に働く．外場の $\boldsymbol{W}^{\mu}$ 場は，光子のようにスピン 1 の偏極ベクトル ε^{μ} と，“SU(2) の偏極ベクトル” a^r ($r=1, 2, 3$) で指定され，後者は 3 つの SU(2) $\boldsymbol{W}$ 状態のどれが関与するか示す．したがって図 8.3 の Feynman 規則は

$$-\mathrm{i}g(\tau^r/2)\gamma_{\mu} \tag{8.119}$$

である．これをスピノール/アイソスピノール u_{i}, $\bar{u}_{\mathrm{f}}$ ではさみ，ε^{μ}, a^r との内積をとる．式(8.119) は 6.3 節の規則(ix)の一般化をきわめて経済的な形で書いた式である．

それでは“アイソスピノール”以外の SU(2) 多重子はどうであろうか．これは一般的な局所的 SU(2) 変換

$$\psi^{(t)} \rightarrow \psi^{(t)\prime} = \exp[\mathrm{i}g\boldsymbol{T}^{(t)} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)]\psi^{(t)} \tag{8.120}$$

のもとでどう世界を共変的にするか，ということである．式(8.120) の中で“アイソスピン”量子数を T のかわりに t と書いた．これはここの“アイソスピン”がハドロンのものでないことを強調したいからである．ハドロンのアイソスピンには記号 T を続けて用いる．t は第 14 章で導入される弱いアイソスピンに用いる記号である．

式(8.120) と，“アイソスピノール”の場合の式(8.84) とを比較すると，自由粒子の波動関数 $\psi^{(t)}$ に対しては ∂^{μ} を

$$D^{\mu} = \partial^{\mu} + \mathrm{i}g\boldsymbol{T}^{(t)} \cdot \boldsymbol{W}^{\mu} \tag{8.121}$$

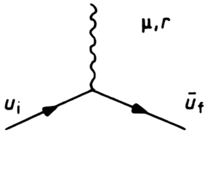


図 8.3 アイソスピノール粒子と W 粒子との頂点

で置き換えればよい．この共変微分はもちろん，$\psi^{(t)}$ の $(2t+1)$ 成分に働く $(2t+1)$ 行 $(2t+1)$ 列の行列である．このようにして局所的 SU(2) 位相変換の完全な処方が得られた．ゲージ場はすべての粒子に共通なただひとつの g で“アイソ多重子”と普遍的に相互作用を行う．相互作用の仕方は，共変微分で生成される局所不変性で規定される．式(8.121)に関連するフェルミオンの頂点は，式(8.119) の中で $\tau^r/2$ を $T^{(t)r}$ で置き換えればよい．

いくつかの注解を付け加えてこの節を終わろう．

(a)　SU(2) 以外の群（QCD の場合がそうである）に関心があったとしよう．以上のことをどう一般化したらよいだろうか．群が何であろうとも，群は生成演算子 G_i（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots r$）を持ち，多重子の変換則

$$\psi'=\exp(\mathrm{i}g\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\alpha})\psi \tag{8.122}$$

を与える．ここで“内積（スカラー積）”は r 成分のベクトル $\boldsymbol{G}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ の間でとる(SU(3) の場合 8 個の生成演算子と 8 個のパラメーター α_i がある)．生成演算子は

$$[G_i,\ G_j]=\mathrm{i}c_{ijk}G_k \tag{8.123}$$

の形の代数を満たす．ここに c_{ijk} は考えている群の構造常数である．変換(8.120)を局所的にするには，r 個のゲージ場 W_1^μ，W_2^μ，……，W_r^μ を導入して共変微分

$$D^\mu=\partial^\mu+\mathrm{i}g\boldsymbol{G}^{(p)}\cdot\boldsymbol{W}^\mu \tag{8.124}$$

を定義する．pは ψ の表現を指定する．$\boldsymbol{G}^{(p)}$ は ψ に働くしかるべき次元の行列のある集まりである．（Yang-Mills の）ゲージ場 W_i^μ（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots r$）自身は無限小変換に対して

$$\delta W_i^\mu(x)=-\partial^\mu\eta_i(x)-gc_{ijk}\eta_j W_k^\mu(x) \tag{8.125}$$

のように変換する．ふたたび，第 1 項は電磁場の場合の一般化(式(8.100)参照)として期待されるものである．第 2 項は，r 個のゲージ場 $\boldsymbol{W}^\mu$ が群の“正則”表現にしたがって変換することを示す．これは変換の係数が群の構造定数と正確に等しい，という意味である．

(b)　（ひとつの群につき）ただひとつの定数 g だけがあるというのは特筆すべき事実である．これは電磁場と<u>同じ</u>ことではない．電磁場では，荷電場それぞれがそれぞれの電荷(e，$-e$，$2e$，$-5e$，……)に等しい強さでゲージ場 A^μ

と相互作用する．決定的に違う点は，$\boldsymbol{W}^{\mu}$ の変換（式(8.95)）で $\boldsymbol{\tau}$ の交換子に2次の項 g^2 が乗ぜられて出現することである．電磁場の場合はこのような交換子は出ない．関連するU(1)位相群は可換だからである．g^2 の項が示すように，交換子は非線型の量であって，交換関係に現れる量の尺度は任意ではない．いったん $\delta\boldsymbol{W}^{\mu}$ が式(8.98) で与えられると（SU(2)の場合），式(8.84) の $\psi^{(1/2)'}$ の中に現れる g と式(8.103)の中に現れる g とは，$\delta\boldsymbol{W}^{\mu}$ の中に現れる g と同じでなくてはならない．これを検証することは役に立つ演習であろう．

(c)　上の議論によれば，なぜ電荷が量子化されていなければならないのかは神秘に閉ざされている．電荷は可換群の結合定数であるから，この見地からは荷電場は任意の電荷を持ってよいはずである．尺度を固定するような交換子はない．これが，電磁的ゲージ変換をより大きな非可換ゲージ群の構造の中に“埋め込んで”しまおうとする試みの動機である．例えば15.3節で簡単に触れるはずの大統一理論，強い相互作用・弱い相互作用・電磁相互作用の統一理論を作る試みはそれにあたる．

(d)　最後に，式(8.98)の $\delta\boldsymbol{W}^{\mu}$ の第2項の極めて重要な物理的意味について注意を喚起したい．ゲージ場自身は，ゲージ群に関する限り“不動”ではない．SU(2)の場合はゲージ場は“アイソスピン”1を持つが，一般の群に対してはその群の正規表現に属する．これは電磁場の場合と意味深く異なる．光子としてのゲージ場 A^{μ} はもちろん電荷を持っていない．光子に対して $e=0$ だから式(8.98)の第2項は A^{μ} に対して存在しない．非可換（Yang-Millsの）ゲージ場は，非可換の“荷量”の自由度を持つという事実は，ゲージ場自身が力の場の量子であるから，ゲージ場が自分自身と相互作用することを意味する．ゲージ場だけの非可換ゲージ理論は，“物質”の場がなくても自明でない相互作用を持ち，したがって自由場の理論ではない．

それでは相互作用の形はどうなるか．ゲージ場と物質場の相互作用は“共変微分”の処方によって得られる．スピン0，スピン1/2の物質場の自由粒子の運動方程式を知っているとすれば，処方はだたちに導かれる．スピン1のゲージ場に対しても式(2.19)からMaxwellの形の方程式を満たすはずだから，まったく同じことを行ってもよいように思われる．しかし，後述するように，これはそう一筋縄ではいかない．

8.4　ゲージ場の自己相互作用：（ｉ）発見法的取り扱い

特定の例題としてSU(2)の場合を続ける．ベクトル場 $\boldsymbol{W}^{\mu}$ に対する標準的な質量を持たない自由粒子の方程式

$$\square \boldsymbol{W}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}=0 \tag{8.126}$$

を“不変式化”することを考察する．方程式(8.126) は $\boldsymbol{A}^{\mu}$ の満たす自由なMaxwell方程式の直接な一般化である．$\boldsymbol{W}^{\mu}$ のSU(2)の3つの成分のいずれもがMaxwell方程式を満たす．$\boldsymbol{W}^{\mu}$ はSU(2)群に関しては $t=1$ の3重子をなすから，式(8.126) に要請される共変微分は

$$D^{\mu}=\partial^{\mu}+\mathrm{i}g\boldsymbol{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu} \tag{8.127}$$

である．(式(8.121) および (8.38) 参照)†．これから

$$D^{2}\boldsymbol{W}^{\mu}-D^{\mu}D^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}=0 \tag{8.128}$$

が出る．しかしこの方法は一意でない．もし自由粒子に対してはまったく等価な

$$\square \boldsymbol{W}^{\mu}-\partial^{\nu}\partial^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}=0 \tag{8.129}$$

から出発したならば，

$$D^{2}\boldsymbol{W}^{\mu}-D^{\nu}D^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}=0 \tag{8.130}$$

に到達したであろう．式(8.130) は式(8.128) と同じではない．どうしてそうでないか，詳しく調べてみると役に立つ．まず

$$\begin{aligned}D^{\mu}D^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}=&\,\partial^{\mu}\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g[\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^{\mu}\boldsymbol{W}^{\nu})]\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\partial^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}\\&+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}-g^{2}(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\boldsymbol{W}_{\nu}\end{aligned} \tag{8.131}$$

および

$$\begin{aligned}D^{\nu}D^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}=&\,\partial^{\mu}\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g[\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\mu})]\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}\\&+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\partial^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}-g^{2}(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})\boldsymbol{W}_{\nu}\end{aligned} \tag{8.132}$$

であるから

$$\begin{aligned}(D^{\mu}D^{\nu}-D^{\nu}D^{\mu})\boldsymbol{W}_{\nu}=&\,\{\mathrm{i}g\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^{\mu}\boldsymbol{W}^{\nu}-\partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\mu})\\&-g^{2}(\boldsymbol{t}_{a}^{(1)}\boldsymbol{t}_{b}^{(1)}-\boldsymbol{t}_{b}^{(1)}\boldsymbol{t}_{a}^{(1)})\boldsymbol{W}_{a}^{\mu}\boldsymbol{W}_{b}^{\nu}\}\boldsymbol{W}_{\nu}\end{aligned} \tag{8.133}$$

† (原注) 弱い相互作用への応用を予想して，$\boldsymbol{t}^{(1)}$ には小文字を使う．

が成り立つ．第2項には $\boldsymbol{W}'$ と $\mathbf{t}^{(1)}$ にあからさまにSU(2)の指標を入れておいた．$\mathbf{t}^{(1)}$ の成分はもちろん交換しない．事実，それらはSU(2)の交換関係(8.37)

$$[t_a^{(1)},\ t_b^{(1)}]=\mathrm{i}\varepsilon_{abc}t_c^{(1)} \tag{8.134}$$

を満たす．したがって（問題8.5）

$$(D^\mu D^\nu-D^\nu D^\mu)\boldsymbol{W}_\nu=\mathrm{i}g\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{W}^\nu-\partial^\nu\boldsymbol{W}^\mu-g\boldsymbol{W}^\mu\times\boldsymbol{W}^\nu)\boldsymbol{W}_\nu \tag{8.135}$$

である．さて"最後の" $\boldsymbol{W}_\nu$ は上の式で何の役割も演じないから，演算子の関係式を

$$(D^\mu D^\nu-D^\nu D^\mu)=\mathrm{i}g\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \tag{8.136}$$

と書き，非常に重要な量

$$\boxed{\text{場の強度テンソル}\ \boldsymbol{F}^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu\boldsymbol{W}^\nu-\partial^\nu\boldsymbol{W}^\mu-g\boldsymbol{W}^\mu\times\boldsymbol{W}^\nu} \tag{8.137}$$

を導入する．$\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ はMaxwellのテンソル $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\nu$ の非可換ゲージ場への一般化である．

∂^μ を式(8.121)の D^μ で置き換えるという簡単な処方では，この場合一意に運動方程式を決めることができなかった．場の方程式の中に任意のパラメーター δ を持ち込むことでこの非一意性を認めることにし，

$$D^2\boldsymbol{W}^\mu-D^\nu D^\mu\boldsymbol{W}_\nu+\mathrm{i}g\delta\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{W}_\nu=0 \tag{8.138}$$

と書く．もし帯電したスピン1の粒子の電磁的相互作用だけを考えていたら，まったく同じことが起こったはずだ，と指摘しておく値打ちがあるであろう．この場合，同じ方法をとれば（$\mathbf{t}^{(1)}$ がないからずっと簡単である），式(8.136)は予想どおり

$$D^\mu D^\nu-D^\nu D^\mu=\mathrm{i}q\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \tag{8.139}$$

で置き換えられる．q は電荷である．このようないきさつから，式(8.138)の中の δ 結合は"非一意的な磁気能率（不定磁気能率）"と呼ばれる．あきらかに，この不定性を決定することは実際上（$W^\pm$ の磁気能率は何か）ばかりでなく原理上の問題である．光子に対しては，もちろん電荷はゼロであってこのようなあいまいさはない．

さて，処方式(8.121)の背後にある意味深長な理由，すなわちゲージ不変性について思い出さなくてはならないことがある．これは理論の中で許される相互作用に対する極めて強力な制約である．5.8.3節でパイオンのCompton散乱を

論じたとき，このような例に遭遇した．もし図 5.14，図 5.17 の図形のみをとるとすれば，振幅は $O(e^2)$ のけたでゲージ不変でない．実際，振幅が e^2 のけたまでゲージ不変であるべしという要求から，図 5.18 の第3の頂点の形が決まった．式(8.138)の中の δ を決めるにも同じ議論を使う．W 粒子と SU(2) アイソスピノールのフェルミオン，すなわちクォークとの“Compton 散乱”を考える．

すでに述べた規則により，図 8.4，図 8.5 に示した2つの図形がある．その振幅の和は

$$(-\mathrm{i}g)^2\bar{u}(p_2)\frac{\tau_s}{2}\not{\varepsilon}_2\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_1+\not{k}_1-m}\frac{\tau_r}{2}\not{\varepsilon}_1 u(p_1)$$

$$+(-\mathrm{i}g)^2\bar{u}(p_2)\frac{\tau_r}{2}\not{\varepsilon}_1\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_1-\not{k}_2-m}\frac{\tau_s}{2}\not{\varepsilon}_2 u(p_1) \tag{8.140}$$

で，実数の偏極ベクトルを用いた．QED のゲージ不変性の条件(5.203)，“$\varepsilon_i \to k_i$”の規則にあたるものは何であろうか．もちろん QED の規則は，光子 A^μ のゲージ変換が

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \tag{8.141}$$

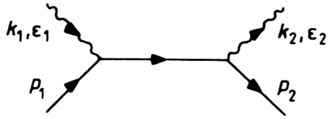


図 8.4　クォーク・W 粒子の“Compton”散乱，直接チャンネル過程

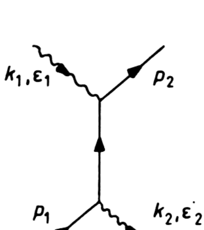


図 8.5　クォーク・W 粒子の“Compton”散乱，交差チャンネル過程

の形をとるから，Lorentz 条件と，ε^μ を $\varepsilon'^\mu=\varepsilon^\mu+\beta k^\mu$（式 (5.202)）に置き換えても物理は不変であるという条件から出ている．しかし，ゲージ変換(8.141)の SU(2) への類推は，無限小の η に対して式(8.98) の形

$$W^{r\mu}\to W'^{r\mu}=W^{r\mu}-\partial^\mu\eta^r-g\varepsilon_{rst}\eta^s W^{t\mu} \tag{8.142}$$

である．実際，“$\partial^\mu\chi$” の部分（$\partial^\mu\eta^r$ にあたる）のほか，W が SU(2) 荷量を持つというまさにその事実に由来する付加項がある．式 (8.142) の中の $\partial^\mu\eta^r$ 部分は W の偏極ベクトルの中で $\varepsilon\to\varepsilon'=\varepsilon+\beta k$ の変化分にあたるが，この変化がこの場合のゲージ変換のすべてではない．しかし，式(8.142)の中の余分な項は因子 g を含むことに注意する．式(8.142)に対応する“完全な”変化を枝線図形で行ったとしても，余分な項は g の高次の項を生ずるであろう．ゲージ不変性は摂動論のそれぞれの次数で別々に成り立つべきである，という見解をとる．このようにして，例えば W 粒子の Compton 散乱は，$\varepsilon_i\to k_i$ の置き換えで不変であると要請する．

しかし，式(8.140) の中で $\varepsilon_i\to k_i$ とおけば

$$(-\mathrm{i}g)^2\mathrm{i}\bar{u}(p_2)\not{k}_2[\tau_s/2,\ \tau_r/2]u(p_1) \tag{8.143}$$

の結果を得る．ここで質量 m のクォークに対して Dirac 方程式を用い，また質量殻の条件 $k_1{}^2=k_2{}^2=0$，$p_1{}^2=p_2{}^2=m^2$ を用いた (問題 8.6)．式(8.143) は確かにゼロではない．もし QED のように可換理論であれば，クォーク・W “荷電” は単なる数であって，非可換の行列ではなかったはずである．実際，この値は

$$-g^2\bar{u}(p_2)\not{k}_2\varepsilon_{rst}(\tau_t/2)u(p_1) \tag{8.144}$$

で与えられる．

スピン 0 の粒子の Compton 散乱の場合と同じく，実は図 8.4，図 8.5 だけが g^2 の次数の全振幅ではない．何を忘れてきたか調べるため $\boldsymbol{W}^\mu$ の方程式 (8.138) に戻ろう．これを

$$\Box\boldsymbol{W}^\mu-\partial^\nu\partial^\mu\boldsymbol{W}_\nu=\text{‘}\hat{V}\boldsymbol{W}\text{’}^\mu \tag{8.145}$$

$$\begin{aligned}\text{‘}\hat{V}\boldsymbol{W}\text{’}^\mu=-\mathrm{i}g\{&\partial^\nu[\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}_\nu)\boldsymbol{W}^\mu]+(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^\nu)\partial_\nu\boldsymbol{W}^\mu+\delta\partial^\mu[(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^\nu)\boldsymbol{W}_\nu]\\&+\delta\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^\mu\partial^\nu\boldsymbol{W}_\nu-(1+\delta)\partial^\nu[(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^\mu)\boldsymbol{W}_\nu]\\&-(1+\delta)(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^\nu)\partial^\mu\boldsymbol{W}_\nu\}\end{aligned} \tag{8.146}$$

と書く（式(3.81) 参照）.† ここに $D\cdot D$ 項の中に現われる g^2 のけたの項は落としてある．かっこ{　}の中の項を，3 つの対になるよう次のように書き直す．

$$`\lambda[\partial((\mathbf{t}^{(1)}\cdot \boldsymbol{W})\boldsymbol{W})+(\mathbf{t}^{(1)}\cdot \boldsymbol{W})\partial \boldsymbol{W}]' \tag{8.147}$$

さて上のポテンシャルによって“$W\to W$”になる振幅を最低次の摂動で考える．この振幅は

$$-\mathrm{i}\int \boldsymbol{W}^{*}_{\mu}(\mathrm{f})\cdot`(\hat{V}\boldsymbol{W}(\mathrm{i}))'^{\mu} \tag{8.148}$$

である．式(8.146) を式(8.148) に代入すれば，明らかに図 8.6 に示すような3個の W を含む 3 重 W 頂点が得られる．これが図 8.4，図 8.5 で失われていたもの ― 図 8.7 の W 交換過程になる．さて戦略は明らかである．まず式(8.148) から 3W 頂点を取り出し，図 8.7 を求めて $\varepsilon_1\to k_1$ としたときに，図 8.4，図 8.5 からくる式(8.144) の中の対応する項とちょうど打ち消すように δ を決めてやればよい．3W 頂点を求めるのは見かけよりはやさしい．式(8.146) のかっこ{　}の中の第一の対を考えると，その寄与は

$$-\mathrm{i}(-\mathrm{i}g)\int W^{s*}_{\mu}(2)\{\partial^{\nu}[t^{(1)t}_{sr}W^{t}_{\nu}(3)W^{r\mu}(1)]+t^{(1)t}_{sr}W^{t\nu}(3)\partial_{\nu}W^{r\mu}(1)\}]\mathrm{d}^4x \tag{8.149}$$

である．ここに SU(2) の指標 r，s，t をあからさまに書いておいた．$t^{(1)}$ の上添え字は隣接する $W(3)$ と内積をとるが下添え字は行列の指標で $W(2)$ および $W(1)$ の 3 つの成分に働く（式(8.118) を参照）．W をいま“1，2，3”と番号をふったが，これは W3 重項の対称性をはっきりさせるためである．同じ理由で

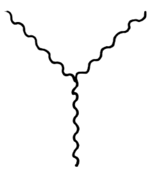


図 8.6　3 W 頂点

* (原注) $\hat{V}$ の符号は式(3.81) の KG 方程式の場合と異なっている．式(8.146) の中の“$\mathbf{t}^{(1)}$-$\boldsymbol{W}$”項が電磁ポテンシャルで置き換えられたとき，頂点が荷電ベクトルボソンにふさわしい頂点と同じ符号をとるように選んであり，偏極ベクトルの内積は負（式(5.28) 参照）という事実を取り込んでいる．

すべての運動量を入射する向きにとって頂点

$$W^{\mu}\sim\varepsilon^{\mu}\exp(-\mathrm{i}k\cdot x) \tag{8.150}$$

を考える．式(8.149) の第１項は部分積分によって ∂^{μ} を $W_{\mu}^{s*}(2)$ に作用させるが，第３項の ∂_{ν} はそのまま $W^{r\mu}(1)$ に作用させる．いつものように４次元のエネルギー・運動量 δ 関数の因子を別にすれば，式(8.149) より

$$-g\varepsilon_{rst}a_1^r a_2^s a_3^t \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2(k_1-k_2)\cdot\varepsilon_3 \tag{8.151}$$

を得る（問題 8.7）．ここで交換関係(8.37) と

$$t_{sr}^{(1)t}=-\mathrm{i}\varepsilon_{tsr}=+\mathrm{i}\varepsilon_{rst} \tag{8.152}$$

を用いた．同様に，式(8.146) の中のほかの項は

$$+g\delta\varepsilon_{rst}a_1^r a_2^s a_3^t(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot k_2-\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_1\cdot k_1) \tag{8.153}$$

および

$$-g(1+\delta)\varepsilon_{rst}a_1^r a_2^s a_3^t(\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_1\cdot k_2-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot k_1) \tag{8.154}$$

となる．すべての項を足し，４運動量の保存則

$$k_1+k_2+k_3=0 \tag{8.155}$$

を用いれば，頂点の振幅は内部偏極ベクトルを落して

$$-g\varepsilon_{rst}\{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2(k_1-k_2)\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3(\delta k_2-k_3)\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1(k_3-\delta k_1)\cdot\varepsilon_2\} \tag{8.156}$$

となる．

式(8.156)より $\delta=1$ は特別な役割を担うことは明らかで，ゲージ不変性の対称性から選ばれてしかるべき値であろう，と推定される．これを検証するために，図 8.7 の３番目の Compton 散乱の図形を計算して $\varepsilon_1\to k_1$ とおく．図 8.7 は“W”粒子の内線を含むが，この段階では光子と同じと仮定する．すなわち質量をゼロとおく．したがってその伝播関数は

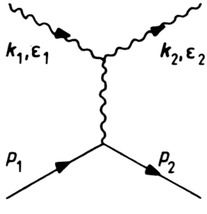


図 8.7　クォーク・W 粒子の Compton 散乱に対する３W 頂点の寄与

$$\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{q^2}\delta^{tt'} \tag{8.157}$$

ととる．因子 $\delta^{tt'}$ は，自由量子が伝播中その SU(2) 荷量を変化しないことを示す．図 8.7 の振幅は，k_2 を入射運動量として考えれば，$(-k_2)$ となり，この場合粒子 3 の偏極状態について和をとればスピン 1 の伝播関数になることを考慮して

$$\{-g\varepsilon_{rst}[\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2(k_1+k_2)_\mu+\varepsilon_{2\mu}\varepsilon_1\cdot(-\delta k_2-k_2+k_1)+\varepsilon_{1\mu}\varepsilon_2\cdot(k_2-k_1-\delta k_1)]\}$$
$$\times\left\{\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{q^2}\delta^{tt'}\right\}\times\left\{-\mathrm{i}g\bar{u}(p_2)\frac{\tau^{t'}}{2}\gamma_\nu u(p_1)\right\} \tag{8.158}$$

となる．式(8.158) で $\varepsilon_1\rightarrow k_1$ と置く時，$\delta=1$ であればこの振幅は式(8.144) からの寄与を正確に打ち消すことは，演習(問題 8.8) として残しておく．したがって図 8.8 の 3W 頂点は

$$\boxed{-g\varepsilon_{rst}\{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2(k_1-k_2)\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3(k_2-k_3)\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1(k_3-k_1)\cdot\varepsilon_2\}} \tag{8.159}$$

と表され，g^2 のけたまで W-Compton 散乱はゲージ不変になる．

ここに g^2 のけたまで非可換ゲージ不変性を検証したが，もちろんこれは理論全体が $\delta=1$ ととればゲージ不変になることを証明しているのではない．実際 3W 頂点の表式を得た上でただちに新しい振幅を調べなくてはならない ― 最低次の W-W 散乱はゲージ不変であろうか．3W 頂点は図 8.9 に示す g^2 のけたの図形を与える．熱心な読者は，これらの振幅の和は（枝線図形に対してはそれでよいのだが）任意の ε を対応する k で置き換えたときに 0 になる，という意味ではゲージ不変ではないことを見いだすであろう．実はこれは驚くべきことではない．3W 頂点の表式を得るとき，式(8.138) から式(8.146) へ移行する

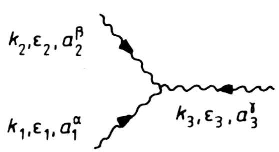


図 8.8　式(8.159) に用いられた記号を付した 3 W 頂点

にあたって W^3 の中の g^2 のけたの項を省略したのであった．これは，最低次の摂動論にはめこむとき図 8.10 に示す g^2 のけたの 4W 相互作用を引き起こす．QED でも図 5.18 に示す 4 つの場の接触相互作用 "e^2A^2" が生じたのに類似している．さて図 8.10 の振幅を証明なしに掲げておこう．

$$\boxed{\begin{aligned}-ig^2[&\varepsilon_{rs\nu}\varepsilon_{tu\nu}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3)\\ &+\varepsilon_{ru\nu}\varepsilon_{st\nu}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4)\\ &+\varepsilon_{rt\nu}\varepsilon_{us\nu}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4)]\end{aligned}} \tag{8.160}$$

実際，式(8.138) で $\delta=1$ とおけばこの式が出る．

g^2 のけたでほかに相互作用はない．したがって理論はこのけたまでゲージ不変である.[†] WW → WWWW のような高次の過程では，たとえ枝線図形の段階でも 6W 頂点がいるのではないか，という疑問から抜けきれない．この点で，ラグランジアンが必要であることを否定するわけにはいかない．前述の分析がいかに有益であろうとも，ゲージ不変性の一般論に答えるためには，すべての

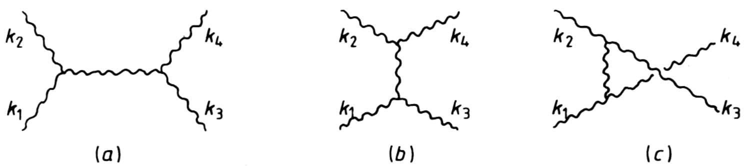


図 8.9　g^2 のけたの W—W 散乱 (a) s チャンネルの寄与 (b) t チャンネルの寄与 (c) u チャンネルの寄与

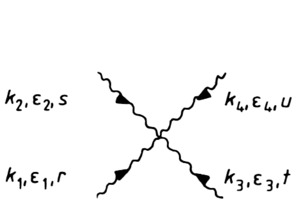


図 8.10　式(8.160) に用いられた記号を付した 4 W 頂点

頂点を定義するゲージ不変なラグランジアンが必要である．これを次に見ていこう．

8.5　ゲージ場の自己相互作用：（ii）　ラグランジアンによる議論

ここで直面する問題は，ゲージ場自身 — SU(2) の例を続けていって **W** とする — についてゲージ不変なラグランジアンを構成することである．先へ進む前に一歩下って，いつも手本にしている QED に戻ってみよう．4.6 節に Maxwell の U(1) ゲージ場 $\hat{A}^\mu$ のラグランジアンが与えてある．電荷 q の粒子に対する Maxwell-Dirac のラグランジアンは

$$\hat{\mathscr{L}}=\bar{\hat{\psi}}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m)\hat{\psi}-q\,\bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}\hat{A}_\mu-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} \tag{8.161}$$

である．さて SU(2) アイソスピノール $\psi^{(1/2)}$ を考えよう．Dirac 部分は

$$\hat{\mathscr{L}}_{\mathrm{D}}=\bar{\hat{\psi}}^{(1/2)}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m)\hat{\psi}^{(1/2)}-g\,\bar{\hat{\psi}}^{(1/2)}(\boldsymbol{\tau}/2)\gamma^\mu\hat{\psi}^{(1/2)}\cdot\hat{\mathbf{W}}_\mu \tag{8.162}$$

である．頂点 (8.119) は式(8.162) の中に確かに取り込まれている．W 同士の相互作用はどうであろうか．“明らかな” ことは式(8.161) の “しかるべき” 一般化を見いだすことである．すでに SU(2) の場の強さのテンソルには出会っており，場の演算子に昇格させて書けば

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu}=\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-g\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu \tag{8.163}$$

である．これは交換子 $[D^\mu, D^\nu]$ から生じた．懐疑的な読者なら，なぜこれを“正しいテンソル”と確信するのか，例えばなぜ $\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu$ ではいけないのか，不思議に思うであろう．答えは容易である．$\boldsymbol{W}$ が微小局所変換 (8.98) を受けるとき，すなわち

$$\hat{\boldsymbol{W}}^\mu \rightarrow \hat{\boldsymbol{W}}'^\mu=\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}-g(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu) \tag{8.164}$$

のとき不変になるような $\hat{\mathscr{L}}$ を探しているのである．可能な項

$$(\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)\cdot(\partial_\mu\hat{\boldsymbol{W}}_\nu-\partial_\nu\hat{\boldsymbol{W}}_\mu) \tag{8.165}$$

[†] (原注) これは質量を持たない W に対してのみ成り立つことを強調しておかなくてはならない．したがって上の結果を直接応用できるのは QCD である．QCD ではゲージ群は SU(3) で，“W”はグルーオンである．電弱理論の質量を持つ現実の W 粒子については，図8.9，図 8.10 のみでは不十分である．14.7節参照．

は変換 (8.164) のもとで不変でないことはすぐ検証できる — $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ は x に依存するのである．式(8.163) の $\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu}$ の要点は，これが変換(8.164) のもとできわめて簡単に

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu} \to \hat{\boldsymbol{F}}'^{\mu\nu} = \hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu} - g\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu} \tag{8.166}$$

として変換すること（問題 8.9 参照）である．式(8.166) は大局的 SU(2) のもとで 3 重子として変換する 3 つのものの変換にほかならない（式(8.72) 参照）．これらから不変式を作る方法は自明である．内積

$$-\frac{1}{4}\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu} \cdot \hat{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} \tag{8.167}$$

を作ればよい．因子 1/4 は QED と矛盾しないよう規格化した因子である．

式(8.167) が，Yang-Mills の論文が与えた答えである．これはきわめて簡単かつ優雅であって，目標に掲げた理論を定義する（式 (8.162) あるいはいかなる物質場を付け加えてもよい）．式(8.167) はまた，局所的な変換(8.164) に対して不変である．

かなり複雑な頂点がどうして得られたのであろうか．それには式(8.167) をくずすと

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(\partial_\mu \hat{\boldsymbol{W}}_\nu - \partial_\nu \hat{\boldsymbol{W}}_\mu) \cdot \partial^\mu \hat{\boldsymbol{W}}^\nu \\
&+ g(\hat{\boldsymbol{W}}_\mu \times \hat{\boldsymbol{W}}_\nu) \cdot \partial^\mu \hat{\boldsymbol{W}}^\nu \\
&-\frac{1}{4}g^2[(\hat{\boldsymbol{W}}^\mu \cdot \hat{\boldsymbol{W}}_\mu)^2 - (\hat{\boldsymbol{W}}^\mu \cdot \hat{\boldsymbol{W}}^\nu)(\hat{\boldsymbol{W}}_\mu \cdot \hat{\boldsymbol{W}}_\nu)]
\end{aligned} \tag{8.168}$$

となるからである．3W 頂点は "g"項にあり 4W 頂点は "g^2"項にある．式(8.159)，式 (8.160) のように項をまとめた理由は次のように考えられる．例えば 3W 頂点

$$\langle k_2,\ \varepsilon_2,\ s;\ k_3,\ \varepsilon_3,\ t\,|\,g(\hat{\boldsymbol{W}}_\mu \times \hat{\boldsymbol{W}}_\nu) \cdot \partial^\mu \hat{\boldsymbol{W}}^\nu\,|\,k_1,\ \varepsilon_1,\ r\rangle \tag{8.169}$$

を考えよう．$\hat{\boldsymbol{W}}$ をそれぞれモード演算子に展開し，はじめと終わりの状態も $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ で書いたとすると，振幅は 6 個の $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ の真空期待値の平均値である．式(8.159)の中の異なる項は，この真空の平均値のゼロでない値を得る異なる方式から生ずる．（5.2 節で展開した演算と同様である）

さて SU(2) ゲージ理論のすべての枝線図形を定義した．SU(3) ゲージ理論への一般化は単に $\boldsymbol{\tau}/2$ を $\boldsymbol{\lambda}/2$ で，ε_{rst} を f_{ijk} で置き換えればよい．こうして QCD

の枝線図形に対する規則が得られる．SU(2) のとき 2, SU(3) のとき 3 より高次の表現に対する頂点は，適当な大きい次数の行列を用いて得られる．しかしその必要はない．クォークとレプトンは弱いスピンの SU(2) 群のもとで 2 重項（第 14 章）をなし，一方クォークは SU(3) カラー群の 3 重項だからである．したがって基本的なフェルミオンはこれらのゲージ群のもっとも小さい（自明でない）基礎表現に属する．

この形式的な章を終わるにあたりひとつ警告しておくことがある．非可換ゲージ理論については，閉線に対する Feynman 規則は枝線図形の頂点から簡単に推定することはできない．実際，式(8.167)はゲージ場に対して枝線図形を超えた範囲の場の量子論の全ラグランジアンではない．一般には“お化け(ゴースト)”粒子との付加的な相互作用が付け加わらなくてはならない．（お化け粒子は閉線のみ伝播する．）15.1 節でその発見法的な議論を行う．場の量子論におけるお化けのラグランジアンの初等的取り扱いについては Aitchison (1982)，Mandl & Shaw (1984)，あるいは Ryder (1985) の書物を見るとよい．

まとめ

(1)　大局的非可換対称性．

(2)　粒子の多重子構造．

(3)　場の量子論における大局的非可換対称性，カレントと保存則．

(4)　局所的非可換対称性，非可換ゲージ理論．

(5)　ゲージ場の自己相互作用，場の強さのテンソル．

問題

8.1　行列要素が式(8.38)で与えられている3行3列の行列 $T_i^{(1)}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ をそれぞれ書き下し，それらがSU(2)の交換関係(8.37) を満たすことを示せ.

8.2　式(8.53) の両辺の $\boldsymbol{\varepsilon}$ を比較して，式(8.54) が式(8.53) より導かれることを示せ.

8.3　式(8.55) で与えられる演算子 $\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}$は，$\psi^{(1/2)}$ との交換関係(8.54) を満たすことを示せ.

8.4　式(8.55) で与えられる演算子 $\hat{\mathbf{T}}^{(1/2)}$ に対して交換関係(8.57) が成り立つことを示せ.

8.5　式(8.135) を証明せよ.

8.6　式(8.140) で $\varepsilon_1 \to k_1$ と置き換えると式(8.143) となることを示せ.

8.7　式(8.149) が頂点(8.151) を導くことを示せ.

8.8　式(8.158) で $\varepsilon_1 \to k_1$ と置き換えると，式(8.144) の符号をかえた量になることを示せ.

8.9　式(8.163)，(8.164) を与えられたものとして変換式(8.166) を証明せよ.

第 9 章 量子色力学入門

ある言い方をすれば，対象は無色である．

L. Wittgenstein, “論理哲学綱要” より

前章において非可換ゲージ力学の簡単な枝線図形の法則を展開してきた．クォーク間の強い相互作用の理論 — 量子色力学, 略して QCD — はこの種の理論である．そのゲージ群は $SU(3)_c$ であって “色”（カラー，下添え字 c で示す）と呼ばれる新しい自由度に働く，という徴候が数多く表れてきた．この章では QCD を紹介し，そのもっとも簡単な実験的結論を議論する．おそらく QCD に関するもっとも著しい事実は, これは強い相互作用の理論であるにもかかわらず，実効的にはまったく弱く相互作用する理論である状況が存在する，ということである（9.3 節参照）．このような場合には，簡単な最低次の摂動の振幅（枝線図形）が，実験データに対して頼りになる定性的な，時には “半定量的な” 目安になる．したがって QED で学んだ図形の技法は（第 1 部参照)，ここで有用な物理を生み出すことになる．高次の補正は一般に本書の程度を超えているが, その予言する効果や, なぜ理論的にも実験的にも QCD を定量的な正確さで使いこなせないか，簡単に触れることにする．定量的な精密さは秀れた先駆者 QED がみごとに突破したところである．

次の 2 つの節で QCD の動機を探ることからはじめる．

9.1 カラー自由度

新しいまだよくわかっていない自由度が物質にあるらしいことは，バリオンの分光学 (Greenberg，1964) ではじめて現れてきた．スピン 1/2 のクォーク 3 個からなるバリオンは，もともとの非相対論的クォーク模型の波動関数では

$$\psi_{3q}=\psi_{空間}\psi_{スピン}\psi_{フレイバー} \tag{9.1}$$

の形をとる．これら空間・スピン・フレイバーの波動関数の積は，重粒子の基底状態に対しては 2 つのクォークの交換に対して対称であることがわかっている (例えば Dalitz，1965 参照)．例えば 1.2.3 節で述べた Δ^{++} 状態は，3 個の u クォーク (フレイバーについて対称) が $J^P=3^+/2$ の状態に結合している．これは軌道角運動量が 0 で空間的に対称，$S=3/2$ のスピン関数も対称である．しかし 4.5 節に見たとおり，場の量子論はフェルミオンが排他律に従うこと，すなわち波動関数 ψ_{3q} がクォークの交換に対して反対称であることを要求する．この要求を満たすひとつの簡単な方法は，クォークがさらにもうひとつの自由度 (カラー，色) を持ち 3q 波動関数はこの自由度について反対称になり得る，とすることである．“カラー” 指標 α を持つカラー波動関数

$$\psi^{\alpha} \quad (\alpha=1,\ 2,\ 3)$$

を導入する．3 つの指標を“1，2，3”と書いたが，これは色の名前を用いて“赤・青・緑” のように呼ばれることがある．これは新しい自由度の 3 つの基礎状態を呼ぶ具体的な命名法にすぎず，実際の色とはまったく無関係であると考えざるを得ない．この自由度を付け加えれば，カラーについて対称な 3-クォーク波動関数は，反対称の記号 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ を用いて

$$\psi_{3q,colour}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\psi^{\alpha}\psi^{\beta}\psi^{\gamma} \tag{9.2}$$

のように作ることができる．この関数が式 (9.1) に乗ぜられて完全な 3q 波動関数になる．今日まで知られている限り，あらゆる重粒子の状態はこの形で記述される．すなわち，“従来の” 空間・スピン・フレイバー波動関数の対称性は全体として対称であり，付加因子式 (9.2) によって反対称性が取り戻される．中間子の状態 ($q\bar{q}$) に関しては，例えば π^+ は以前 ($\bar{d}u$) であったが，これがいまや

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{d}^1u^1+\bar{d}^2u^2+\bar{d}^3u^3) \tag{9.3}$$

と書かれる．これを一般的に $(1/\sqrt{3})\bar{\psi}^a\psi^a$ と書く．この“中性になる重ね合わせ”と式(9.2) の群論的な意味についてはすぐ論ずる．その前に，式(9.2) は実際3つの ψ から反可換な組み合わせを作る唯一の方法であって（カラー）1重項と呼ばれていることに注意しよう．これがただひとつしかないというのは歓迎すべきことで，さもないと物理的に観測される以上の重粒子の状態ができてしまう．以下に示すように，式(9.3) もカラー1重項である．

クォークの型（自由度）を増やすだけで物理的な結果が見られないのであれば，これはいささか人工的な工夫にすぎないであろうが，具体的な結果が実際にある．クォークの生成や消滅で記述できる過程では，クォークの型の多重度が断面積に入ってくる．例えば，高エネルギーで比

$$R=\frac{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-\rightarrow \text{ハドロン})}{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-\rightarrow\mu^+\mu^-)} \tag{9.4}$$

はクォーク·パートン模型（7.5節参照）ではそれぞれのクォークと光子との結合の大きさを反映する．

$$R=\sum_a e_a^2 \tag{9.5}$$

ここで a はすべてのクォークの型にわたる．5つのクォーク u，d，s，c，b はそれぞれ電荷 2/3，−1/3，−1/3，2/3，−1/3 を持つので，この比は 7.5節でみたように

$$\text{カラーなし}\ R=\frac{11}{9} \tag{9.6 a}$$

および

$$\text{カラーあり}\ R=\frac{11}{3} \tag{9.6 b}$$

となる．図9.1に再録したデータは b クォークの生成のしきい値以上のエネルギーで式(9.6 b) とほぼ合う†．（さらに高いエネルギー領域では，t クォーク生成のしきい値以上で R が増加すること，および Z^0 ボソンの効果があることが期待される．実際，後者の影響は KEK（高エネルギー物理学研究所）の

† (原注) しかし，データは (9.6 b) の予言よりずっと大きいように見える．これは実は自由パートン模型の高次補正として QCD の予言するところである．以下の 9.5節を参照．

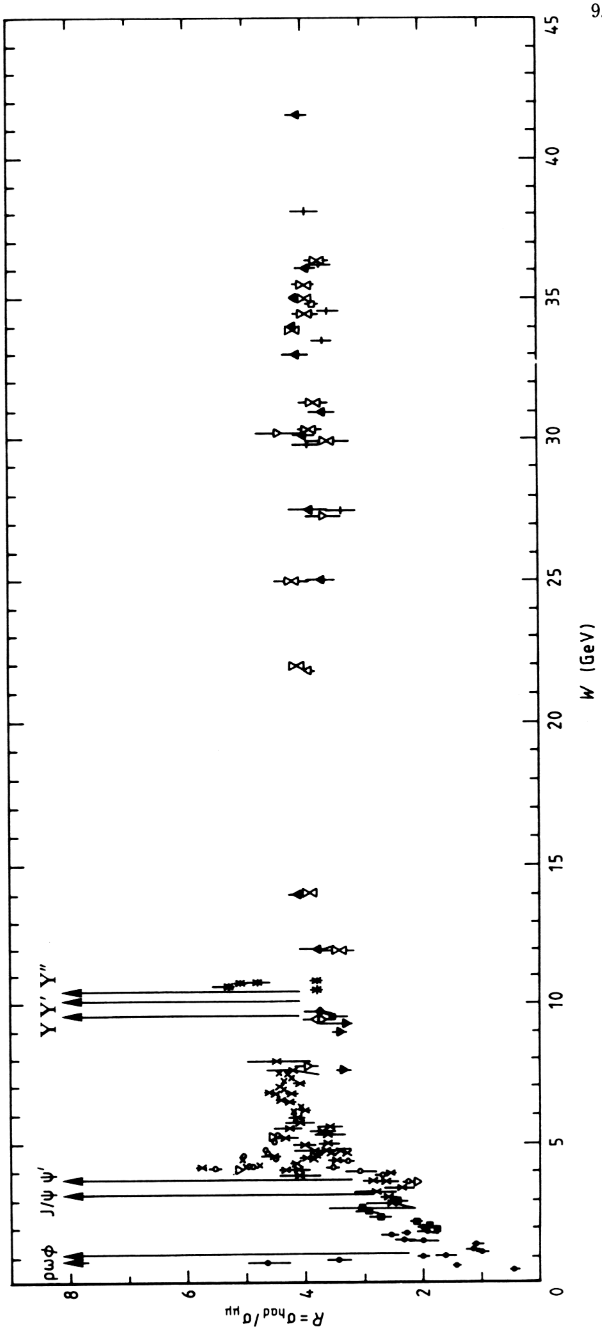


図 9.1　比 R（式(7.89)参照．（R. Cashmore 提供））

検出器によって観測された（Sagawa, *et al*., 1988）.

第7章でクォーク・パートン模型における Drell-Yan 過程を論じたが，これは素過程 $q\bar{q} \to l\bar{l}$ を含み，式(9.4) の逆過程である．この場合・因子 1/3 が現れると言ったが，これにはじめの $q\bar{q}$ の組み合わせについて平均し(因子 1/9)，カラーについて中性の光子になる状態について足し（$\bar{q}_1q_1$, $\bar{q}_2q_2$ および $\bar{q}_3q_3$ の 3 個）たものである．しかしこの因子と，深非弾性散乱と矛盾しないクォークの分布関数を用いて計算すると，CERN の ISR 加速器によるパートン素過程の有効重心エネルギーに対応する断面積がおよそ 2 倍になる．QCD では，これは自由系パートン模型に対する高次補正と解釈されているが，高エネルギー領域で不一致はより少ないはず（すなわちパートン模型はずっと良い）であることを，のちに示すであろう．実際，CERN $p\bar{p}$ 衝突加速器による W, Z の生成反応過程は，実効重心系エネルギーがずっと高い類似の過程であるが，因子 1/3 を付した Drell-Yan 模型は，データとよく一致する全断面積を与える(14.5.4 節参照).

9.2　カラーの力学

9.2.1　SU(3) 群としてのカラー

ここでカラーの可能な力学的役割，言い換えればクォーク間の力がカラーにどのように依存するか考察しようと思う．与えられたフレイバーのそれぞれについて，3つの異なるクォークの型が必要であるように思われる．それらはすべて同じ質量を持たなくてはならない．でなければハドロンの準位に何か“微細構造”が見えるだろうからである．さらに，同じ理由によって，“カラー”はクォークの力学を支配するハミルトニアンの正確な対称性でなくてはならない．どのような対称性が必要であろうか．答えは $SU(3)_c$ である，と示唆する経験事実をいくつか考察しよう．

まず手始めに，クォーク間の力はカラーによるべきことは明白である．ハドロン状態の“カラー多重項”は観測されていないからである．例えば，前に波動関数を示した“無色”の物理的 π^+ と縮退しているほかの 8 個の π^+（$\bar{d}^B u^R$, $\bar{d}^G u^R$, ……など）は観測されていない．観測にかかるハドロンの状態はすべてカラー 1 重項で，力がまさにそうなっていなくてはならない．さらに詳しく言え

ば，力はハドロンのスペクトルに見い出されるような極めて制限された型のクォークの配位しか作り出さない．再び1.2節に引用した核物理と素粒子物理のアイソ多重子の類推をとってみよう．後者の場合，非常に著しい違いがひとつある．中間子には $T=0, 1/2, 1$ のみが起こり，バリオンの場合は $T=0, 1/2, 1$ および $3/2$ のみが起こる．しかし核の場合は，$T=5/2, 3, \cdots$ などの状態を抑止する理由は原理的にない．(実際，このような核の準位は実験的に同定するのが難しい．それらの準位はある同重体の高い励起状態で生ずる — 図1.10(c)参照 — であろうが，そのような所では準位は極めて密である．）同様な制約は $SU(3)_f$ でも成り立つ．中間子では **1** および **8** 表現のみが，重粒子には **1**, **8**, **10** の表現のみが現れる．クォークの言葉をもってすれば，これはもちろん次の処方に集約される —“中間子は $q\bar{q}$，重粒子は qqq”．

これはまさに，核物理では $A=2$ と $A=3$ の核しか存在しない，とでも言えるであろう．したがってクォークの力は劇的な飽和性を持っていなくてはならない．どうやら $\bar{q}qq$，qqqq，qqqqq …などの状態は存在しないらしい．さらに，qq あるいは $\bar{q}\bar{q}$ 状態も存在せず，その意味では単独の q も $\bar{q}$ も存在しない．

カラー1重項の状態のみが存在すると仮定し，クォーク間の力はカラーだけに依存すると仮定するならば，$\bar{q}q$ 状態は観測され qq や $\bar{q}\bar{q}$ 状態は観測されないという事実は，カラーにどんな群を対応させるべきか重要な手がかりを与える．ひとつの簡単な可能性は，3つのカラーは $SU(2)_c$ 3重項“$\boldsymbol{\psi}$”の成分に対応するということであろう．とすれば，式(9.2)の反対称・カラー1重項・3クォークの重粒子の波動関数は，スカラー3重積 $\boldsymbol{\psi}_1\cdot\boldsymbol{\psi}_2\cdot\boldsymbol{\psi}_3$ であり，これでうまくゆくように見える．では中間子の波動関数についてはどうであろうか．それを論ずるには $\boldsymbol{\psi}$ がクォークを表すとして反クォークをこれら“カラー空間”波動関数でどう表すべきか知る必要がある．答えは，反クォークはクォークを表す波動関数の複素共軛で表される．この事実を完全に証明する余裕はないが，少くとももひとつもっともらしい類推を与えておこう．4運動量 p を持つ自由なスピン0の粒子は，波動関数 $\phi\sim\exp(-ip\cdot x)$ で記述される．この複素共軛は $\exp(+ip\cdot x)$ であり，これは4運動量 $-p$ の粒子を表す．第3章の Feynman の解釈によれば，これは4運動量 p の反粒子である．したがって，クォークのカラー3重子波動関数 ψ^a が，カラー変換のもとで

$$\psi^{\alpha} \to \psi^{\alpha\prime} = Q^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta} \tag{9.7}$$

のように変換すると仮定するならば，“反”3重子の波動関数は $\psi^{\alpha *}$ であって

$$\psi^{\alpha *} \to \psi^{\alpha * \prime} = Q^{\alpha *}_{\beta}\psi^{\beta *} \tag{9.8}$$

のように変換する．ここに Q は，SU(2) の $T=1$ 表現にみあう3行3列のユニタリー行列である．

以上の事を知って $\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}$ から作られる中間子に対するカラー1重子の波動関数を作ってみよう．$\psi^{*}_{(1)}$ は反クォーク，$\psi_{(2)}$ はクォークを表すとして，量 $\sum_{\alpha}\psi^{\alpha *}_{(1)}\psi^{\alpha}_{(2)}$（式(9.3) 参照）を考えよう．これは行列記法を用いれば $\psi^{\dagger}_{(1)}\psi_{(2)}$ と書いてよい．$\psi^{\dagger}$ はいつものように列ベクトル ψ の複素共軛の転置(行ベクトル)である．式(9.8) の転置をとり，$\psi^{\dagger}$ は

$$\psi^{\dagger} \to \psi^{\dagger\prime} = \psi^{\dagger}Q^{\dagger} \tag{9.9}$$

のように変換することがわかるから，積 $\psi^{\dagger}_{(1)}\psi_{(2)}$ は

$$\psi^{\dagger}_{(1)}\psi_{(2)} \to \psi^{\dagger\prime}_{(1)}\psi^{\prime}_{(2)} = \psi^{\dagger}_{(1)}Q^{\dagger}Q\psi_{(2)} = \psi^{\dagger}_{(1)}\psi_{(2)} \tag{9.10}$$

のように変換する．最後の変形で Q のユニタリー性を用いた．積は変換(9.7)，(9.9)のもとで不変，すなわち望んでいたようにカラー1重子である．これが式(9.3) の重ね合わせの意味である．

すべてうまくゆくように見えるが，問題がひとつある．ここで用いたSU(2)の3次元表現は極めて特別な性格を持つ．変換を記述する行列 Q が実数にとれる，ということである．これは，SU(2) 群と3次元の回転群の間の大いなる類推を用いるならば，“物理的”に解釈することができる．（アイソスピンの“回転”などと幾何学的用語が用いられる理由である．）実3次元ベクトルが回転のもとでどう変換するかはよく知られている ― 3行3列の直交行列によって変換する．SU(2) も同じである．波動関数 $\boldsymbol{\psi}$ を実に選び，変換行列 Q もまた実に選ぶことは常に可能である．Q は一般にユニタリーであるから，直交行列でなくてはならない．さてここで基本的な困難が生ずる．$\boldsymbol{\psi}$ と $\boldsymbol{\psi}^{*}$ の間に区別ができない．どちらも同じ実行列のもとで変換する．これは，$\bar{\mathrm{q}}\bar{\mathrm{q}}$ 状態や qq 状態に対しても，$\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}$ 状態とまったく同じにSU(2) 不変（カラー1重項）の組み合わせを作り得るということを意味する．しかしこのような“2クォーク（ダイクォーク）”または“2･反クォーク”状態は見つかっておらず，仮定によりカラー1重子ではあり得ない．

次に簡単な可能性は，3 つのカラーが $SU(3)_c$ 3 重項の成分に対応することであろう．この場合，クォークの波動関数は式(9.7)のように，反クォークの波動関数は式(9.9) のように変換するけれども，今度は

$$Q = \exp(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda}/2) \tag{9.11}$$

である (式(8.44)参照)．$\psi^\dagger_{(1)}\psi_{(2)}$ の不変性の証明は前と同じようにうまくゆくが，反対称 3q 状態を表す式(9.2) もまた $SU(3)_c$ 不変であると示すことができる (問題 (9.1))．したがって提起された中間子も重粒子もカラー 1 重子である．式(9.11) で $\boldsymbol{\lambda}$ をすべて純虚数に選ぶことができないので, $SU(3)_c$ の 3 行 3 列の Q 行列は実行列になり得ず，したがって $\boldsymbol{\psi}$ と $\boldsymbol{\psi}^*$ の間の区別ができる．実際，qq あるいは $\bar{q}\bar{q}$ 状態から $SU(3)_c$ カラー 1 重項を作ることはできないことが証明される．

このように，$SU(3)_c$ 群はカラー群として可能な，かつもっとも経済的な群であると考えられる．

9.2.2 大域的 $SU(3)_c$ 不変性とグルーオン

上に述べたように，経験的な基礎の上にたって，物理的に観測できるハドロン状態はカラー 1 重子のみである，と仮定している．これは $SU(3)_c$ のもとで 1 重項ということである．どんな種類のクォーク間力がこの劇的な結果を生じさせているのだろうか．ふたたび SU(2) の類推をとり，SU(2) のもっとも小さい (2 重項の) 表現に属する 2 つの核子の相互作用を考えよう．状態をアイソスピン T で指定するとすれば，2 核子に対する可能な T の値は $T=1$ (3 重項) と $T=0$ (1 重項) である．これらの状態の間に分裂を起こし得るアイソスピン依存性のある力が知られている．これは $V\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2$ と書かれ "1" と "2" は 2 つの核子をさす．全アイソスピンは $\boldsymbol{T}=1/2(\boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_2)$ で，

$$\boldsymbol{T}^2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\tau}_1^2 + 2\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_2^2) = \frac{1}{4}(3 + 2\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2 + 3) \tag{9.12}$$

であるから

$$\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2 = 2\boldsymbol{T}^2 - 3 \tag{9.13}$$

が成り立つ．3 重項の状態では $\boldsymbol{T}^2=2$，1 重項の状態では $\boldsymbol{T}^2=0$ である．したがって

$$(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)_{T=1} = 1 \tag{9.14a}$$

$$(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)_{T=0}=-3 \tag{9.14b}$$

となり，もし V が正であれば $T=0$ の状態の準位は下がる．同様なことは $SU(3)_c$ でも起こる．もしクォーク間の力が，

$$\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2 \tag{9.15}$$

に比例する項を通じてクォークのカラーに依存するとしよう．このとき，まったく同じようにして全カラー演算子

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2) \tag{9.16}$$

を導入すれば

$$\boldsymbol{F}^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{\lambda}_1^2+2\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2+\boldsymbol{\lambda}_2^2) \tag{9.17}$$

となり，例えば $\boldsymbol{\lambda}_1^2=\boldsymbol{\lambda}_2^2=\boldsymbol{\lambda}^2$ とおけば

$$\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2=2\boldsymbol{F}^2-\boldsymbol{\lambda}^2 \tag{9.18}$$

となる．演算子 $\boldsymbol{F}^2$ は $\boldsymbol{\lambda}_1$，$\boldsymbol{\lambda}_2$ のすべての成分と交換し（ちょうど $\boldsymbol{T}^2$ が $\boldsymbol{\tau}_1$，$\boldsymbol{\tau}_2$ と交換するように），$SU(3)_c$ の 2 次 Casimir 演算子 C_2 と呼ばれる（$\boldsymbol{T}^2$ は SU(2) の C_2 である）．SU(2) の全スピン/角運動量の T のように，C_2 の固有値は $SU(3)_c$ で重要な役割を果たす．これらの固有値は，当然 $SU(3)_c$ の表現により，実際一般に SU(3) の表現を指定する指標のひとつである．1 重項 **1** 表現に対応する $\boldsymbol{F}^2$ の値は 0（多重度なし）である．3 次元 **3** 表現に対する $\boldsymbol{F}^2$ の値は $\boldsymbol{\lambda}$ 行列（付録 F）から手で計算することができる．

$$\boldsymbol{F}^2(\mathbf{3})=\frac{1}{4}\boldsymbol{\lambda}^2=\frac{4}{3} \tag{9.19}$$

である．高い次数の表現でもすべて $\boldsymbol{F}^2$ の値は正であり，一般に次元数が増えると増大する．例えば

$$\boldsymbol{F}^2(\mathbf{8})=3 \tag{9.20}$$

である（Lichtenberg，1978）．したがって，$SU(3)_c$ の場合でも，SU(2) の類推どおり，$\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2$ 型の力は $\mathbf{1}_c$ 状態の準位を下げる．

もちろん，このような簡単なポテンシャル模型では，$\mathbf{1}_c$ 状態とすべての“有色”状態とのエネルギー差が無限大になる，とは言えない．これは“カラー 1 重項のみ”という制約があれば望ましいことであるが，にもかかわらず，クォーク（あるいは反クォーク）カラー 3 重子の間に，どんな単一粒子の交換（5.6 節

参照)があれば，$\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2$ の形の相互作用を生ずるか，という疑問を呈することができよう．その答えは，（ある程度予想していたとおり）グルーオンと呼ぶ $SU(3)_c$ 8 の粒子が交換される．カラーは正確な対称性であるから，カラー相互作用を記述するクォークの波動関数は $SU(3)_c$ 共変でなくてはならない．そのような方程式で簡単なものは

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m)\psi=g_s\frac{\lambda^\alpha}{2}A^\alpha\psi \tag{9.21}$$

である．g_s は“強い荷量”であり A^α ($\alpha=1,\ 2,\ \cdots 8$) はスカラー“グルーオン・ポテンシャル”の 8 重項である．これはクォーク・グルーオン頂点

$$-\mathrm{i}g_s\lambda^\alpha/2 \tag{9.22}$$

に対応し，頂点を 2 つのグルーオンの伝播関数で結べば(図9.2)，振幅の $SU(3)_c$ 構造は

$$\psi_{1'}^\dagger\frac{\lambda_1^\alpha}{2}\psi_1\delta^{\alpha\beta}\psi_{2'}^\dagger\frac{\lambda_2^\beta}{2}\psi_2=\psi_{1'}^\dagger\frac{\boldsymbol{\lambda}_1}{2}\psi_1\cdot\psi_{2'}^\dagger\frac{\boldsymbol{\lambda}_2}{2}\psi_2 \tag{9.23}$$

となる．因子 $\delta^{\alpha\beta}$ は，自由に伝播するグルーオンはカラーを変化しない，という事実を表す．この相互作用はカラー空間でまさに望ましい“$\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2$”の性格を持っている．

現時点での自然な推理は，これらのグルーオン (A^α の量子) は，核子の運動量の 50% を担う電荷を持たないパートンであろう (7.3 節の深非弾性散乱で論じた事実による)．9.4 節では，この着想がどう検証されたかを示す．

9.2.3　局所 $SU(3)_c$ 対称性，QCD の枝線図形に対する Feynman の規則

式(9.21) で導入されたグルーオンが実際 QED の光子のようにベクトル粒子であるという考えは，もちろん非常に魅力的である．とすれば式(9.21) は

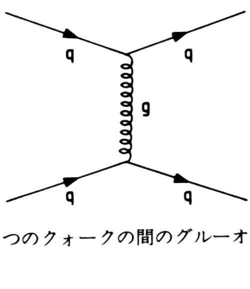


図 9.2　2 つのクォークの間のグルーオンの交換

$$(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi=g_{\mathrm{s}}\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\not{A}^{\alpha}\psi \tag{9.24}$$

となり，頂点(9.22) は

$$-\mathrm{i}g_{\mathrm{s}}\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\gamma^{\mu} \tag{9.25}$$

と表される．この誘惑の背後には，カラーの力学をできるだけQEDに似せ，ゲージ原理から力学を導きたいという欲求がある．前の章で見たように，この考えはクォークの世界が局所 $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{c}}$ 変換

$$\psi \rightarrow \psi'=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\lambda}/2)\psi \tag{9.26}$$

のもとで不変である，という簡単ではあるが意味深い仮定を必要とする．これは置き換え

$$\partial_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu}+\mathrm{i}g_{\mathrm{s}}\frac{\lambda^{\alpha}}{2}A^{\alpha\mu}(x) \tag{9.27}$$

によって実行され，ただちに式(9.24)，頂点(9.25)（式(8.119)参照）および図 8.3 に導く．

もちろん，それ以上のことも出る．特に，グルーオンは質量を持たないベクトル粒子（スピン 1）で 3-グルーオン，4-グルーオン頂点を通じてグルーオン同士相互作用する．これは SU(2) の頂点(8.148)，(8.152)に対応する SU(3) の頂点である．グルーオンの Feynman 規則は次のようになる．

（i） Lorentz 条件(5.13) に対応するゲージの選択を行ったときの伝播関数

$$-\mathrm{i}g^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}/q^2 \tag{9.28}$$

（ii） 3 グルーオン頂点（図 9.3，すべての運動量が入射する向き）

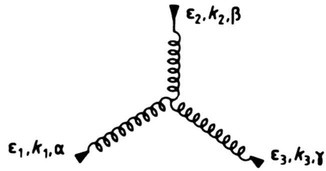


図 9.3　3 グルーオン頂点

$$-g_s f_{\alpha\beta\gamma}[\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2(k_1-k_2)\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3(k_2-k_3)\cdot\varepsilon_1 \\ +\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1(k_3-k_1)\cdot\varepsilon_2] \tag{9.29}$$

(iii) 4 グルーオン頂点（図 9.4，すべての運動量が入射する向き）

$$-\mathrm{i}g_s^2[f_{\alpha\beta\eta}f_{\gamma\delta\eta}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3) \\ +f_{\alpha\delta\eta}f_{\beta\gamma\eta}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4) \\ +f_{\alpha\gamma\eta}f_{\delta\beta\eta}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4)] \tag{9.30}$$

局所 $SU(3)_c$ は，強い相互作用の基礎理論として Fritzsch & Gell-Mann (1972) によって提唱された.

しかし，いかにゲージ原理が優雅で強力であるからといっても，いかなる理論も実験事実を説明できるかできないかによって，生き残るかつぶれるかするはずである．ところでここに一番難しい点が正面に現れる．よくわかった頼りになる計算法がひとつある．くりこみを行った摂動論である．局所的非可換ゲージ理論はくりこみ可能であることは 't Hooft (1971 a，b) によって証明された．単に大域的に不変な非可換理論ではそうではない，ということは注目に値する．(ゲージ不変性はくりこみ可能の証明に本質的に必要である†．) しかし，摂動論は比較的弱い相互作用にしか適用できないが，QCD は強い相互作用の理論と考えられている．QED の摂動の技法をどのように QCD に有効に応用できるだろうか．2 つの理論の間にかなり形式的な類似性があるにもかかわらず (すでに強

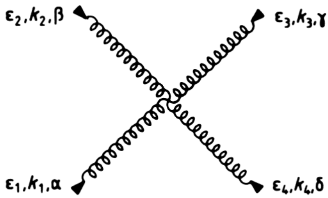


図 9.4 4 グルーオン頂点

† (原注) これが 8.4 節でゲージ不変性にこだわった真の理由である．

調したとおり)，少くともひとつ決定的に違う点がある．QEDの基本量子（レプトンと光子）は自由粒子として観測されているが，QCDの基本量子（クォークとグルーオン）はされていない．QCDをデータと比べるためには，複雑な非摂動的な強い相互作用の過程（“閉じ込め”）を考慮せざるを得ないように思われる．閉じ込めはクォークとグルーオンをハドロンの中に束縛し，基礎にあるQCD構造の簡単さを失ってしまうであろう．

さてここで第7章から，パートン模型のかなりな経験的成功を思い出さなくてはならない．そこではパートン（今やクォークやグルーオンと解釈される）間の相互作用はまったく無視されていたのであった．深非弾性散乱し，あるいは一般に“かたい”高エネルギーの大角衝突では，なにかハドロンの構成要素はほとんど自由で，実効相互作用は弱いように見えるのである．一方，これとほとんど相反するような状況がある．力は実際，極めて強いのでクォークでもグルーオンでもハドロンから完全に分離され，自由粒子として取り出されたことはない．このような今まで前例のない不思議を解決する鍵は，非可換ゲージ理論の基本的な特徴，“漸近自由性”にある．これは強い相互作用の理論として非可換ゲージ理論を取り上げるときほとんど避けられない理論的動機である．この性質により，“強い相互作用”の物理でも摂動（枝線図形）が有効に用いられる状況を確認できる．であるから，まず漸近自由性を論じ，9.4節から9.6節へかけて簡単な摂動計算を行おう．

9.3　漸近的自由性

本質的な物理的概念は以下のごとくである．2つの粒子の間の相互作用は，ただひとつの定数ではなく粒子間の距離の関数になる実効“荷量”（結合定数）によって特徴づけられる．非可換ゲージ諸理論の場合は，実効的な結合は分離の距離が非常に小さくなるとゼロに向かい，このような理論は漸近的に（すなわち $r \to 0$ で）自由であると呼ばれる．これがかたい散乱で証明されたように，クォークとグルーオンが短い距離では弱く相互作用をするように見える理由である．

距離に依存する荷量が生ずることを，なじみ深い例を用いて説明しよう．水のような分極可能な電媒質の中に置かれた試験電荷 q を考える．媒質中にもう

ひとつの試験電荷 $-q$ をもってくると，2 つの試験電荷の間の電場は，永久電気双極子を持っている水の分子を図 9.5 のように並べてしまう．その結果単位体積あたり $\boldsymbol{P}$ の誘起電気双極子能率を生じ，(初等的な静電気学より)場に及ぼす $\boldsymbol{P}$ の効果は $-\mathrm{div}\boldsymbol{P}$ の空間電荷が場に及ぼす効果に等しい．いつものように $\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{E}$ に比例するととれば $\boldsymbol{P}=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ で，Gauss の定理は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_{\mathrm{free}}/\varepsilon_0 \tag{9.31}$$

から

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=(\rho_{\mathrm{free}}-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P})/\varepsilon_0=\rho_{\mathrm{free}}/\varepsilon_0-\nabla\cdot(\chi\boldsymbol{E}) \tag{9.32}$$

に修正される．ここに ρ_{free} は電媒質中においた試験電荷を表す．χ は $\boldsymbol{E}$ に比べてゆっくり変わる量であれば，式(9.32)の中では近似的に一定であり，式(9.32)は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_{\mathrm{free}}/\varepsilon \tag{9.33}$$

と書くことができよう．ここに $\varepsilon=(1+\chi)\varepsilon_0$ は媒質の電媒常数，ε_0 は真空の電媒常数である．したがって場は実効的に因子 $(1+\chi)^{-1}=\varepsilon_0/\varepsilon$ だけ弱くなっている．

これらはいずれもなじみ深い基礎事実である．しかし上の扱い方は本質的に巨視的であって，分子は電荷密度 $-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}$ の連続分布で置き換えられていた．2 つの試験電荷の距離があらく言って分子間距離の程度に小さくなれば，上の場の弱まり（あるいは遮へい効果）はやむはずであって，場は遮へい効果のない値を持つ．一般に，2 つの試験電荷 q_1，q_2 の間の静電ポテンシャルは現象論的に

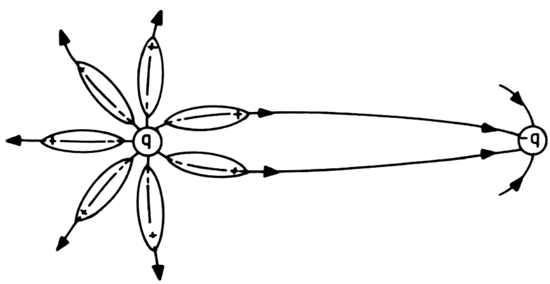


図 9.5 双極子媒質の中の電荷の遮へい (Aitchison, 1985)

$$V(r)=q_1q_2/4\pi\varepsilon(r)r \tag{9.34}$$

で表され，d を分極した分子の直径とするとき $\varepsilon(r)$ は $r\gg d$ のときの値 ε から $r\ll d$ のときの値 ε_0 へ緩やかに変わると仮定される．この状況はそれぞれの試験電荷に有効電荷

$$q'=q/[\varepsilon(r)]^{1/2} \tag{9.35}$$

を与えることで記述できるであろう．したがって図 9.6 に示すように，粒子間の距離による有効荷量を得たことになる．

さて，電媒質を真空で置き換えることにより，この考えを量子場の理論 — まず QED — に応用することを考えてみる．真空偏極（分極）の概念は 6.10 節で導入した．重要な見方は，真空中の試験電荷の近くには，荷電粒子対が生成され得ることである．質量 m の粒子対は $\Delta t\sim\hbar/mc^2$ の程度の時間存在し得る．対はこの間に $c\Delta t$ の程度の長さ，すなわちほぼ Compton 波長 $\lambda\!\!\!^{-}_C\sim\hbar/mc$ まで広がることができる．この長さが今までの“分子の直径”の目安になる．もとの荷電粒子のまわりに真空の遮へい効果を生ずる原因が，偏極した仮想粒子対であるからである．この類推では（仮想対が存在しない）裸の真空が上の巨視的解析の“真空”に対応し，（仮想対の存在する）物理的真空が分極可能な電媒質に相当する．もちろん，物理的真空の“外側へ”出ることはできないから，実際はいつも r に依存する有効電荷を取り扱っていることになる．それではなじみ深い記号 e で表すものの意味は何であろうか．これは単に $r\to\infty$ に対応する有効電荷，あるいは現実的には粒子対の Compton 波長よりずっと大きい距

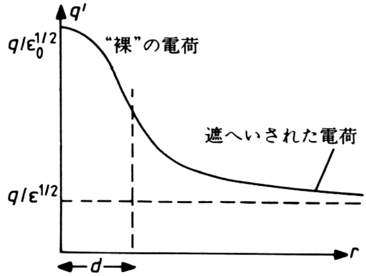


図 9.6　電荷間の距離に対する有効（遮へいされた）電荷．（Aitchison, 1985）

離に対応する電荷である．例えば Thomson 散乱で測定される電荷は，この長距離の電荷の値である．

QED の共変的脈絡のうちで言えば，距離に依存すると言いたくない．適切な類推は，力を伝達する光子の担う不変運動量移行 q^2 による結合の強さ（あるいは電媒常数）である．例のごとく，大きい q^2 領域の 1 光子振幅の挙動は小さい距離の粒子間ポテンシャルの挙動に対応するであろう．“物理的”な電荷（ふつう慣習的に用いる e）は，長距離領域あるいは $q^2 \to 0$ のときの $e(q^2)$ の極限である．

QED で実際予想される q^2 依存性は，6.10 節ですでに与えた表式から得ることができる．そこでは，$e^-\mu^-$ 散乱に及ぼす真空偏極をあからさまに論じた．式 (6.202) は，実際無限大のくりこみを行ったあとで，粒子は q^2の小さい所で

$$e(q^2)=e\left(1-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}+\cdots\right)^{1/2} \tag{9.36}$$

のような q^2 依存性を示す電荷を持つとみなされる，ということを表している．ここで…は高次の補正を表す．上に要請したように，$e(0)=e$ になっていることに注意せよ．電荷よりも微細構造定数そのものを考えるほうが普通であるから，一般に q^2 に依存し $\alpha=\alpha(0)$ であるような実効微細構造定数を

$$\alpha(q^2)=\alpha[1+\alpha F(q^2/m^2)] \tag{9.37}$$

と書く．

式 (9.37) は真空偏極からくる α の有限な変化を表している．この変化はくりこみの効果とみなすことができよう．ここでは 6.10 節で言及したような固体物理における有限なくりこみとまったく類似した意味に，この言葉を用いている．いま見た式 (9.37) の特別な表式は，q^2 に依存するくりこみ効果なのである．6.10 節ではこの効果が測定可能であることを強調しておいた．

$|q^2|$ が大きいとき（$|q|^2 \gg m^2$），F は対数的に増大し（例えば Bjorken & Drell，1964 参照），α は

$$\alpha(q^2)=\alpha[1+(\alpha/3\pi)\ln(|q^2|/m^2)+\cdots] \tag{9.38}$$

となる．この式は $\alpha(q^2)$ の実効的な大きさは $|q^2|$ が大きくなる（距離が短かくなる）につれて増大することを示す．何はともあれ，これは物理的には合理的である．真空の偏極によって電媒定数が変化し，有効電荷は減少するが，電気

双極子のある典型的な長さの“内部”に入り込めば，この効果は消失する（電荷は増大する）．今の場合，この長さは電子の Compton 波長 m^{-1}($c=\hbar=1$ の標準単位系）であって，電子・陽電子対のゆらぎの存在する領域の典型的な長さである．

式(9.38)は $|q^2|\gg m^2$ の場合に成り立つ α の最低次の補正である．この極限では，真空偏極の主要項は摂動論の各次数で分離することができ，あからさまに和を求めることができる．これら“主要対数項”の和は

$$\alpha(Q^2)=\frac{\alpha}{[1-(\alpha/3\pi)\ln(Q^2/m^2)]}\qquad Q^2\gg m^2\text{ の場合}\tag{9.39}$$

となる．q を運動量移行として正の量 $Q^2=-q^2$ を導入する．式(9.39)は無限個の寄与を足し合わせているから，式(9.38) の改良になっていると思われるかもしれないが，実用上はそうではない．Q^2 が増大するにしたがい，式(9.39)と式(9.38) との違いは $Q^2\sim m^2\exp(137)$ に達するまでは 1% 前後にしかならない．このエネルギー$\sim 10^{26}$ GeV は実用的な外挿領域のまったく外側にある領域であり，さらに今まで考慮の外に置いてきた重力の効果が効き始めるかもしれないような長さの領域に相当する（式(6.196) のあとの論議を参照）．物理的に関心のある領域では，本質的に α が非常に小さな量であることから，式(9.39)は式(9.38)と区別がつかない．さて状況は非可換ゲージ理論の場合は，いろいろな点でまったく異なってくることを示そう．

特定の場合を考え，QCD を扱おう．局所 $SU(3)_c$ 群のゲージ結合定数 g_s は e と似た役割を持つ．QED との類推から，“強い”微細構造定数 $\alpha_s=g_s^2/4\pi$ と Q^2 に依存するその拡張 $\alpha_s(Q^2)$ を導入する．しかしただちに難点が生ずる．QED では電荷の 2 つの源を物理的に長い距離に引き離し，その極限 $(e=e(Q^2=0))$ でも“物理的”に有効な電荷を定義することができた．このような分離は QCD では不可能と思われる．このような $Q^2\to 0$ の極限の“物理的” g_s あるいは α_s を測定することはできないのである．実際，確かに物理的に合理的であり便利であっても，$Q^2\to 0$ の極限で QED の物理的 e を定義する必要はない．どんな Q^2 でもよいであろう．QCD では，$Q^2=0$ を使うことができないから，理論の中に質量の 2 乗の次元を持つ任意のパラメーター μ^2 を導入して，α_s の“基準値”を $\alpha_s(Q^2=\mu^2)$ と置く．それでは $\alpha_s(Q^2)$ は $Q^2\neq\mu^2$ のときどう変化するであろう

か．特に $Q^2 \to \infty$ のとき何が起こるであろうか．

例えばクォーク・クォーク散乱の場合，確かに1個のグルーオンを交換する図形は，図9.7のような $q\bar{q}$ 閉線を含む真空偏極の図形によって修正を受ける．これはQEDの e^+e^- 閉線と同じ効果を生み出すであろう．しかしQCD(および任意の非可換ゲージ理論)の場合は，摂動論の同じ次数 α_s^2 でほかの図形からの寄与がある．すなわち図9.8に示すグルーオン閉線の寄与である．なんべんも念を押したように，この図形の起源は，非可換理論ではグルーオン自身がゲージ荷量を担い，グルーオン同士が相互作用をするからである．グルーオンの自己

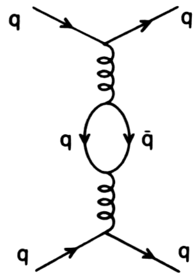


図 9.7　クォーク・クォーク散乱の1グルーオン交換過程に対する真空偏極の効果

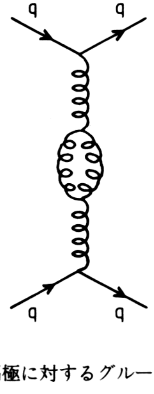


図 9.8　真空偏極に対するグルーオン閉線の寄与

相互作用を含み α_s^2 のけたで入ってくるもうひとつの図形は図9.9に示してある．しかしながら，この種のグルーオン効果が，Q^2 が大きくなるとき，$\alpha_s(Q^2)$ を増大させるか減少させるかを説明する簡単な物理的議論(QEDの閉線による偏極効果に対応するような解釈)は存在しない(しかし例えばHughes，1981；Nielsen，1981を参照)．

しかしこの問題は計算によって解決することができる（Politzer，1973；Gross & Wilczek，1973)．グルーオンの寄与は実に $q\bar{q}$ の寄与と逆の効果を持つことが判明した．グルーオン効果は Q^2 の大きいとき $\alpha_s(Q^2)$ の減少を引き起こす．式(9.38）の $SU(3)_c$ 版は

$$\alpha_s(Q^2)=\alpha_s(\mu^2)\left[1-\frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}(33-2f)\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)+\cdots\right] \qquad (9.40)$$

であることが見いだされている．“$-2f$”（f はフレイバーの数)の寄与はクォークの閉線に由来し，本質的に $f=1$ のQEDの表現(9.38）と同じ（カラーに関係する因子2を別にして）である．決定的な新しい点は因子“33”である．これはグルーオンから生じたものでクォーク閉線の寄与と反対の符号を持つ.（この因子の大きさはカラーの群に依り，例えば $SU(2)_c$ なら22である.）さて $33>2f$，すなわち $f\leqq16$ であれば大きい Q^2 に対して $\alpha_s(Q^2)$ は減少する傾向を持つ．Yang-Mills量子の寄与はこの“反遮へい”の性質を生じ，Yang-Mills場を持たない理論はこの性質も持たない(Coleman & Gross, 1973)．非常にあらっぽく言えば，グルーオンは“分裂”できるのでクォークのQCD荷量を“拡散”する効果を持つ，と思ってよい．Q^2 の大きい領域では，広がった荷量分布によ

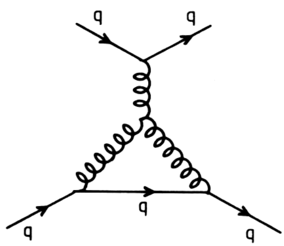


図9.9　α_s^2 のけたで寄与するほかの図形

る散乱は点状の荷量による散乱よりいつも弱い．Q^2 が大きくなれば粒子は荷量の広がった領域の内部に入り込み，したがってより少ない荷量しか感じないからである．

ふたたび高次の主要対数項は加え合わせることができ，式(9.40) は式(9.39) に対応する表式

$$\alpha_s(Q^2)=\alpha_s(\mu^2)\left[1+\left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}\right)(33-2f)\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)\right]^{-1} \tag{9.41}$$

で置き換えられる．この形では，$f\leqq 16$ であれば $Q^2\to\infty$ のとき $\alpha_s(Q^2)\to 0$ となることが見てとれる．これが"漸近的自由性"と呼ばれる性質である．大きい Q^2 に対して $\alpha_s(Q^2)$ がゼロに近づくということは，Q^2 の大きい(短距離での)過程は摂動論が使えるであろうという希望的見解の基本的論拠になっている．

QED の場合とは逆に，式(9.41) は式(9.40) に比べて大きな改良になっている．その理由は 2 つある．まず第一に，各次数で正しく主要項を同定してきたと仮定すれば，$f\leqq 16$ である限りたとえ摂動級数(9.40) が成立しなくなるような大きな Q^2 に対しても，式(9.41)は意味のある結果を与えるように用いることができる．$f\leqq 16$ であれば，式(9.41) の分母は $Q^2>0$ に対して常に正である．QED の場合は分母がゼロになるような（おそらく物理的でない）特異点があるため，式(9.39) は任意に大きい Q^2 に対して用いることができない．第 2 に，QCD の予言と実験データとの比較は(以下を参照)，α_s の典型的な値が $0.1\lesssim\alpha_s\lesssim 0.5$ の範囲にあることを示している．このような α_sにとっては，例えば 1GeV 以上のエネルギーに対して，Q^2 の変化は QED の場合よりずっと大きな意味を持つ．

この第 2 の点は，そのみかけにもかかわらず実は式(9.41) は 2 つの独立なパラメーター μ^2，$\alpha_s(\mu^2)$ を含んでいるのではない，ということがわかれば，一層容易に理解することができる．

$$\ln\Lambda^2=\ln\mu^2-12\pi/[(33-2f)\alpha_s(\mu^2)]$$

を導入すると式(9.41) は

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{12\pi}{(33-2f)\ln(Q^2/\Lambda^2)} \tag{9.42}$$

と書くことができる（問題 9.2）．これは $\alpha_s(Q^2)$ がこの主要対数項の近似ではた

だひとつのパラメーターによることを示す．実験から Λ を正確に抽出することは，理論上，実験上の困難から大変である (Duke & Roberts, 1985) であるが，典型的な値は 100～200 MeV の範囲にある．式(9.42)は $Q^2 \sim \Lambda^2$ では信用できない．$\alpha_s(Q^2)$ の値が非常に大きくなり，用いた摂動論的方法が成り立たなくなるからである．実際，Λ は“強い相互作用が強くなる”エネルギーの尺度であると考えることができる．すなわち閉じ込めの力が効きはじめるエネルギーである．別の言い方をして距離とか力の到達距離で言えば，閉じ込めの領域はおよそ 1 fm で Λ の値はおよそ 200 MeV と思われる．図 9.10 は式(9.42)を $f=6$, $\Lambda=100$ MeV の場合 Q の関数として描いた曲線で，α_s が Q^2 とともにどう変わるかその様子を示している．実験的な状況については以下に更に述べるつもりである．

最後に次の注意をしておく．QED はひとつのパラメーター，無次元の微細構造定数 α で特徴づけられると考えている．これに対して QCD では，持ち込むパラメーターは質量，すなわち Λ である．

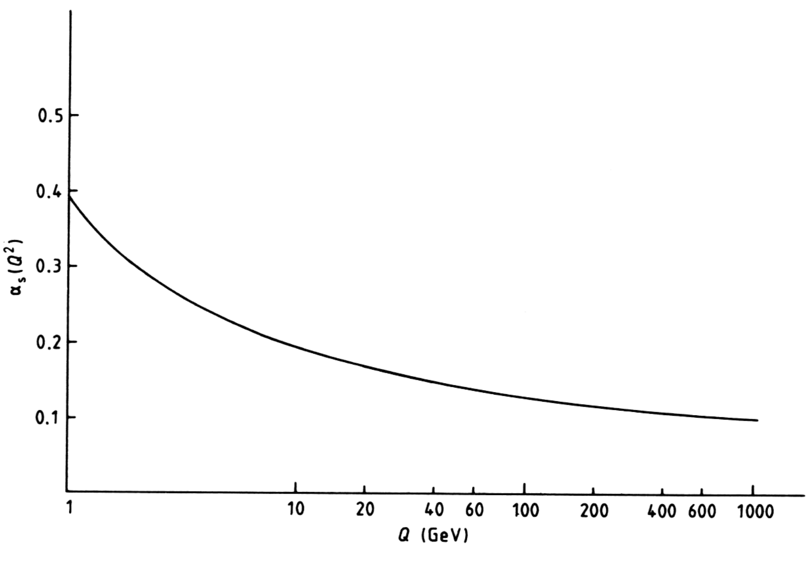


図 9.10　$\Lambda=100$ MeV ととったときの Q と $\alpha_s(Q^2)$ の関係

9.4　かたい散乱過程と QCD 枝線図形

9.4.1　$p\bar{p}$ 衝突の 2-ジェット事象

第 7 章でパートン模型を導入し，深非弾性散乱と Q^2 の大きいデータをハドロン中の自由で点状の“パートン”の概念でいかにみごとに解釈できるかを論じた．これは模型であって理論ではない．この章の残りの部分は，QCD の理論がパートン模型を正当化しかつ観測にかかるその補正を予言する方法について述べる．換言すれば，“パートン”は今や QCD の量子（クォーク，反クォーク，グルーオン）とまさしく同定されるのである．しかし次の理由によって，例えばハドロンの“構成要素”などという代わりに引き続き“パートン”という言葉を用いる．束縛状態中にある一定数の構成要素があるという（本質的に非相対論的な）概念が意味を持つのは，比較的低いエネルギーか小さい運動量転移の場合に限る．相対論的なエネルギーや短距離では，対創生やその他のゆらぎ現象が非常に重要になるので，“束縛状態が何からできているのか”文字どおり考えるのはもはや意味がない．のちにわかるように，もっともっと近くでみると（Q^2 が大），ますます“端片”が現れてくるのである．この意味で“構成粒子”よりは“パートン”が望ましい．後者は一定数のという伝統的な含蓄を担っているように思われるからである．

7.5 節で e^+e^- 物理におけるジェットの概念に簡単に触れた．これは非常によく方向のそろったハドロンの噴出であって，おそらくクォーク・反クォーク対として創生され高速度で反対方向に分離していったものと考えられる．パートン階層の力学では，$e^+e^- \to q\bar{q}$ は QED に支配される．また 7.4 節では，ハドロン同士の衝突でどのようにハドロンがパートン（クォーク，反クォーク，グルーオン）のビームとしてふるまうかを見た．逆反応 $\bar{q}q \to \bar{l}l$ によって $\bar{l}l$ の対をたくさん作り得るのである．この力は電磁的で，QED の摂動の最低次でよく記述できる．しかし，ハドロン中のパートン同士の衝突は決して QED で起こる過程に限られているわけではない．むしろ反対に，パートン間には QCD で決まる強い相互作用があると期待される．したがって一般に，これら非摂動的な強い相互作用によって，データは複雑で解釈は難しい．しかし漸近自由性の教えるところでは，短距離ならば“強い相互作用”にさえ摂動論を応用できるのである．

このように，短距離のパートン・パートン衝突の同定と解釈は，QCD の枝線図形の構造の直接的な検証になるのではないかと望みを託すことができるであろう．

どのようにして，実験的に短距離衝突を同定できるであろうか．答えは，Rutherford が原子の中に小さな重い散乱の中心（核）を見いだしたのと同じ方法である．入射ビームの方向に対して大きな角をなして飛び出してくる2次粒子を観測することである．2次粒子それぞれに対して，横運動量 $p_T = p\sin\theta$ を定義することができる．p は粒子の運動量，θ はビームの軸に対する射出の角度である．ハドロン物質が滑らかで一様であれば（Thomson の原子を考えよ），p_T に対する事象の数の分布は，p_T の大きい値に対して急激に減少する — おそらく指数関数的に減少すると予想されるであろう．これは大部分の事象が観測されることである．現今の衝突型加速器のエネルギー領域で測られた荷電粒子の p_T の平均値は非常に低い．$\langle p_T \rangle \sim 0.4$ GeV である（Arnison *et al*., 1983 a, Banner *et al*., 1983 a）．しかし，衝突事象のごく一部分では，高い p_T の2次粒子の放出が観測されている．これは最初に CERN の ISR（重心エネルギー 30〜62 GeV）で観測され（Büsser *et al*., 1972, 1973, Alper *et al*., 1973, Banner *et al*., 1983 a），パートンの概念で次のように説明された．物理的な過程は2段階で考察される．第一段階では（図 9.11）ひとつのハドロン中のパートンが他のハドロン中のパートンと短距離で衝突を起こし，最低次の摂動論に従えば，2つのパートンが大きな角度をなして衝突領域から高速度で飛び出してくる．

2つのパートンが分離するにつれ，実効的な相互作用の強さが増し（図 9.10）第2の段階に入る．カラー荷を持つパートンは，強いカラー閉じ込めの力によって，カラー1重子のハドロンに転化する．この非摂動論的な第2段階をパートンの破砕といい，それを詳しく力学的に解明する問題はまだ解けていない．

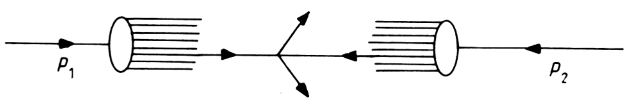


図 9.11　パートン・パートン衝突

にもかかわらず，観測にかかるハドロンを作り出すほど強い力に対して，破砕の段階の主要な過程は，小さな運動量転移を含むのに違いない，と論ずることができる．したがって，2 つのかなりよく方向のそろったジェットが生じ，それぞれが親のパートンの 4-運動量にほぼ等しい 4-運動量を持つという物理像を得る (図 9.12)．したがってジェットは，その基礎にある QCD 過程をハドロンで表して観測したものであろう．

さてここで，膨大な数の全事象の中から，かたい散乱をさらによく分析するためにえり分ける，という実験的問題に直面する．初期の実験は単一の p_T の大きい陽子の検出を観測装置の引き金として用いた．しかし，このような引き金はジェットの観測数を著しく減らしてしまうことがわかった．ジェット中のひとつのハドロンが実際にジェット全体の横運動量の大部分を持って出てゆくという確率は非常に小さいからである (Jacob & Landshoff, 1978, Collins & Martin, 1984, 第 5 章参照)．それよりも衝突領域をカロリメーター(中に蓄積される全エネルギーを測る装置) を並べて覆う方がよい．大角のジェットは，隣接するカロリメーター細胞のいくつかの中に蓄積される全横エネルギーが極めて大きいことで同定される．これが現代の“ジェット引き金”方式である．カロリメーター引き金法の重要性は，Berman *et al*. (1971) の初期の仕事に引き続き Bjorken (1973) によって強調された．大角ジェットをこの方法で検出し解析する仕事は，はじめて CERN $p\bar{p}$ 衝突加速器による UA2 (地下実験区 2)

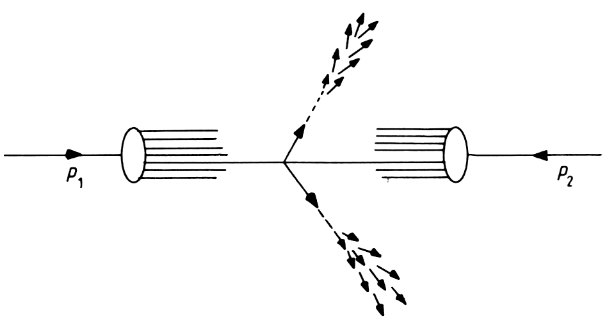


図 9.12　パートンが破砕されてジェットにかわる

の協同研究で報告された(Banner *et al*., 1982)．これから以下に論ずるように，極めて明確なジェットのデータが多数 UA 1，UA 2 の双方で集積されている．

それぞれの事象について，全横エネルギー $\sum E_T$ は

$$\sum E_T = \sum_i E_i \sin\theta_i \tag{9.43}$$

で測られる．E_i は i 番目のカロリメーター細胞に蓄積されたエネルギー，θ_i は細胞の中心の天頂角，和はすべての細胞にわたる．図 9.13 は観測された $\sum E_T$ の分布を示す．データは $\sum E_T \leqq 60$ GeV では“やわらかい”指数関数上にのるが，その後離れて，かたい過程の特徴を持つ大角衝突の存在する明確な証拠を示す．

すぐ下に示すように，“かたい”過程の大部分は 2-ジェット型で，$\sum E_T$ をほぼ半分ずつ分担する．したがって“局所的”な引き金は，横エネルギーの蓄積がその付近で約 30 GeV より大きくなれば現象を記録するか，あるいは“大局的”な引き金では 60 GeV 以上で働くようにする．衝突加速器のエネルギー領域($\sqrt{s}$ ~500 から 600 GeV)では，このような事象を起こすのに十分なエネルギーがある．

全エネルギー $\sqrt{s}$ の値は別の理由からも重要である．$\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ 重心系での 2 つのパートン衝突の運動学を考えよう(図 9.11)．7.4 節のDrell-Yan 過程のように，右へ運動するパートンは 4- 運動量

$$x_1 p_1 = x_1(P,\ 0,\ 0,\ P) \tag{9.44}$$

を，左へ運動するパートンは

$$x_2 p_2 = x_2(P,\ 0,\ 0,\ -P) \tag{9.45}$$

を持つ．ここに $P = \sqrt{s}/2$ で，パートンの横運動量は省略した．横運動量の大きさは観測された $\langle p_T \rangle$ の値でほぼ制限される($\langle p_T \rangle \sim 0.4$ GeV であるから衝突加速器のエネルギーの尺度では無視できる)．簡単な 90° 散乱の場合を考えよう．このとき質量を持たないパートンに対して $x_1 = x_2 \equiv x$ である．全横エネルギーはしたがって $2xP = x\sqrt{s}$ である．これが 50 GeV より大きければ，衝突加速器のエネルギー領域で $x \gtrsim 0.1$ が必要である．パートンの分布関数は，これら小さい x の値に対しては，海クォーク(7.3 節参照)とグルーオン(下の図 9.18 参照)のため大きい．したがって断面積の値が妥当に出る．ISR のエネルギー領域では($\sqrt{\mathrm{s}}$~60 GeV)このような $\sum E_T$ の高い値による切断は，x が 1 にずっと近い

ことを示し，そこでは分布関数は非常に小さい．しかし逆に $\sum E_T$ の低い値で切断するとジェットをひろい上げることができない．実際，$\bar{p}p$ 衝突加速器による 90° 方向のジェットの包含生成は，ジェットの横運動量の関数として，ISR の同じ $\sum E_T$ に対する値に比べ 10^3 倍ほども大きい．これは Horgan & Jacob (1981) によって予言された事実である．

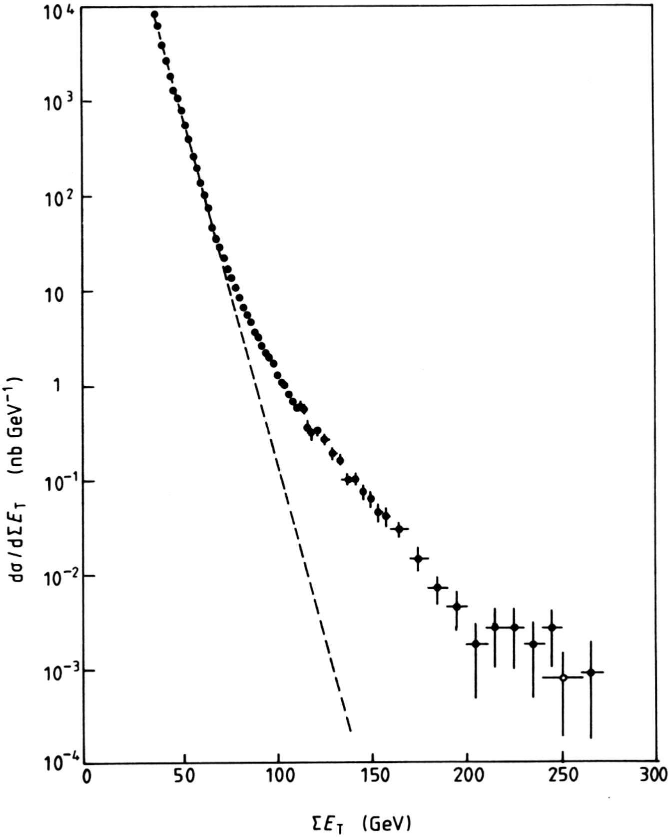


図 9.13 UA 2 実験の中央カロリメーターによって観測された全横エネルギー ΣE_T の分布 (Di Lella, 1985)

ジェット現象の特徴とは何か．$\sum E_T$ が十分大きい（$\gtrsim$150 GeV）のとき，本質的に全横エネルギーは互いに逆方向に向かう 2 つのジェットの間にほぼ等量分割される．典型的な一例が図 9.14 に示してある．式 (9.44)，(9.45) の運動量にもどってみると，x_1 は一般に x_2 と等しくなく，図 9.14 からも見られるように，ジェットは一直線上にない．しかし，パートンの横運動量を省略しうる限り，ジェットは入射ビームの方向と同じ平面内にあり，それらの相対方位角は 180° であろう．図 9.15 は，カロリメーターの細胞にわたる横エネルギーの和の分布を，ジェットの開き角 θ と方位角 ϕ の関数として解析したいくつもの例である．われわれはまさに一種の"Rutherford"過程を見ていることが顕著に証明されている．類推を変えれば，ハドロンのジェットは，基礎にある場の力学を視覚に訴えるという意味では，Faraday の鉄粉とまったく同じ役目を果たして

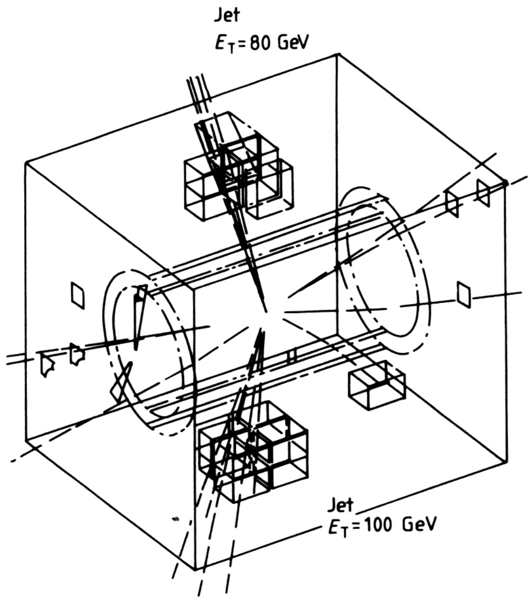


図 9.14　2 枝ジェット事象，荷電粒子の飛跡を，UA 1 実験の円筒型中央検出器から再構成すると，カロリメーターのエネルギー集結に 2 つの大きな塊があって，2 つの強く絞られた粒子束が発生しているのを観測することができる

いる．

さてここで，これら2枝ジェット現象のより詳細な特徴を考えてみよう．特にQCDに基づく枝線図形（$\sum E_{\mathrm{T}}$ を妥当なエネルギー尺度ととれば $\alpha_{\mathrm{s}} \leqq 0.2$ であることに注意）から予想される事がらについて調べよう．はじめのハドロンは，クォーク・反クォーク・グルーオンの広くひろがったビームを生じ，したがってたくさんのパートンの素過程 $\mathrm{qq} \to \mathrm{qq}$，$\mathrm{q\bar{q}} \to \mathrm{q\bar{q}}$，$\mathrm{q\bar{q}} \to \mathrm{gg}$，$\mathrm{gg} \to \mathrm{gg} \cdots$ などが起こる．その断面積はパートン模型では Drell-Yan 型の式で与えられる．電磁的消滅過程の断面積

$$\sigma(\mathrm{q\bar{q}} \to \mu^+\mu^-) = 4\pi\alpha^2/3q^2 \tag{9.46}$$

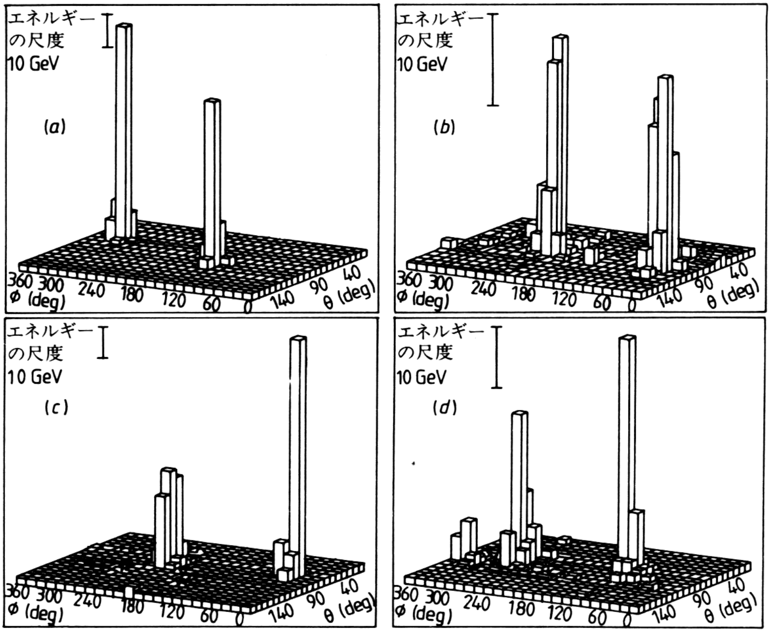


図 9.15 $\Sigma E_{\mathrm{T}} > 100$ GeV である4つの事象について，横エネルギーの分布を θ，ϕ 平面で描いた図（UA 2 実験，Di Lella, 1985）．それぞれの1単位は UA 2 カロリメーターの1個の細胞の大きさを表す．ϕ の和は 180°（mod. 360°）に等しい

はいろいろなQCDの素過程断面積で置き換えられ，それぞれがしかるべき分布関数で重みをかけられる．一見すると寄与をするパートン過程がたくさんあるから，これはずいぶん複雑な話になるように思われる．しかし，パートン衝突の重心系では，1グルーオンの交換を含むすべての過程は，本質的に同じRutherford型の角分布，θ を重心系のパートンの散乱角として $\sim\sin^{-4}(\theta/2)$，に従うという事実から，極めて重要な単純化ができる(1.2 節参照)．これは表 9.1 に示してある(Combridge *et al.*，1977 より引用)．これはいろいろな過程のスピンで平均した行列要素の 2 乗 $|M|^2$ を表したもので，これを用いればパートンの微分断面積は

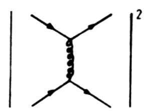
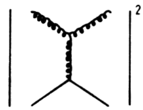
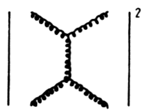
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}=\frac{\pi\alpha_s^2}{2\hat{s}}|M|^2 \tag{9.47}$$

で与えられる（式(5.115) 参照)．ここで $\hat{s}$，$\hat{t}$，$\hat{u}$ は素過程の不変量で，したがって

$$\hat{s}=(x_1p_1+x_2p_2)^2=x_1x_2s \qquad \text{(式(7.75)参照)} \tag{9.48}$$

である．パートンの横運動量は省略する近似を続けると，図 9.11 に示すはじめ

表 9.1　スピンで平均した行列要素の 2 乗

基本過程	$\|M\|^2$	QCDの主要な図形
$\mathrm{qq}\to\mathrm{qq}$ $\mathrm{q\bar{q}}\to\mathrm{q\bar{q}}$	$\frac{4}{9}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}\right)$	
$\mathrm{qg}\to\mathrm{qg}$	$\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}+\ldots$	
$\mathrm{gg}\to\mathrm{gg}$	$\frac{9}{4}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}\right)+\ldots$	

のパートンの配位は，ビームの方向の Lorentz 変換によって重心系に移される．そのとき外へ出てゆくパートンはビーム軸に関して角 θ で互いに反対方向に出てゆく．したがって $\hat{t}\propto(1-\cos\theta)\propto\sin^2(\theta/2)$ である．表 9.1 には $(\hat{t})^{-2}$ $\sim\sin^{-4}(\theta/2)$ を含む項しか与えていない．これらの項の $\hat{s}$，$\hat{t}$，$\hat{u}$ 依存性は 3 つの型の過程に対して同じであることに注意する（実際，$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ の 1γ 過程でそうであった．$d\sigma/dt$ を $d\sigma/d(\cos\theta)$ にかえる（問題 6.6 参照））．図9.16は UA1 で測られた 2 枝ジェットの角分布である（Arnison *et al*.，1985）．破線で書かれた曲線は QCD 枝線図形すべての予言する角分布である．実際これは $\sin^{-4}(\theta/2)$ に極めて近い．

この解析は，基本的なかたい散乱事象は質量を持たない量子の交換によって起こる，という動かせない証拠である．図 9.16 中の“枝線図形”理論と実験との食い違いは，実線で書かれた曲線が示すように，α_s のある高次の補正を行うことで説明することができる．

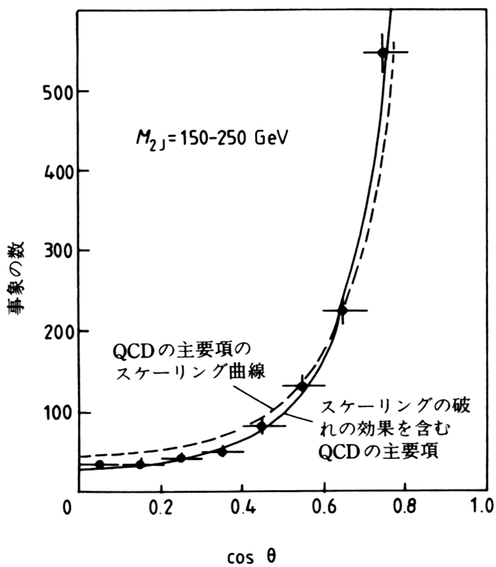


図 9.16 cos θ に対して描いた 2 枝ジェットの角分布（Arnison *et al*., 1985）

すべての基礎過程の角分布がそれほど類似しているという事実により，これら2枝ジェットのデータからさらに重要な情報を引き出すことができる．一般にパートン模型の断面積は

$$\frac{d^3\sigma}{dx_1 dx_2 d\cos\theta}=\sum_{a,b}\frac{F_a(x_1)}{x_1}\cdot\frac{F_b(x_2)}{x_2}\cdot\sum_{c,d}\frac{d\sigma_{ab\to cd}}{d\cos\theta} \tag{9.49}$$

の形を持つ（式(7.84) 参照）．ここに $F_a(x_1)/x_1$ は“a”タイプのパートンの分布関数，$F_b(x_2)/x_2$ も同様である．すべての $d\sigma/d(\cos\theta)$ がほとんど同じことと，表9.1 の数係数が同じことに注意すると，パートンのタイプの和は

$$\frac{9}{4}\{g(x_1)+\frac{4}{9}[q(x_1)+\bar{q}(x_1)]\}\{g(x_2)+\frac{4}{9}[q(x_2)+\bar{q}(x_2)]\} \tag{9.50}$$

になる．ここに $g(x)$，$q(x)$，$\bar{q}(x)$ はそれぞれグルーオン・クォーク・反クォークの分布関数である．したがって実効的に，重みのついた分布関数

$$F(x)=g(x)+\frac{4}{9}[q(x)+\bar{q}(x)] \tag{9.51}$$

が観測にかかる.† 実際，式(9.50) の重みをとれば

$$\frac{d^3\sigma}{dx_1 dx_2 d\cos\theta}=\frac{F(x_1)}{x_1}\cdot\frac{F(x_2)}{x_2}\cdot\frac{d\sigma_{gg\to gg}}{d\cos\theta} \tag{9.52}$$

である．x_1, x_2 は測られたジェット変数から運動学的に決めることができる．式(9.48) より

$$x_1 x_2=\hat{s}/s \tag{9.53}$$

で，$\hat{s}$ は2-ジェット系の不変量，質量の2乗である．また P_L を2枝ジェットの全縦運動量とすると

$$x_1-x_2=2P_L/\sqrt{s} \tag{9.54}$$

である．図9.17 は，UA1（Arnison *et al*., 1984）および UA2（Bagnaia *et al*., 1984）によって得られた $F(x)$ を示す．またこの図には $Q^2=20\ \mathrm{GeV}^2$ および 2000 GeV^2 (Abramovicz *et al*., 1982 a, b, 1983) の深非弾性ニュートリノ散乱に合わせた $F(x)$ の曲線を示してある．$F(x)$ が Q^2 とともに変化する理由

† (原注) 因子 4/9 は QCD のクォーク・グルーオンおよびグルーオン・グルーオンの結合の強さを反映している．

は 9.6 節で述べる．実験との一致は定性的に満足すべき結果を示す．深非弾性レプトン散乱からわかるクォーク・反クォークの分布関数を引いて，UA1 のデータはグルーオンの構造関数 $g(x)$ を図 9.18 に示すように与える．グルーオン過程はxの小さい所で優勢になることが明らかだが，表 9.1 のカラー因子によって，大きい x の所でも重要である．

この重要な節を終わるにあたり，ある制限について注意を促しておかなくてはならない．パートンの質量はずっと無視してきた．しかし実験はハドロンジェットの不変質量を数 GeV という低い値で測っている．これは重いクォークの質量の程度である．パートンの p_T とジェットの横エネルギー $\sum E_T$ を結び

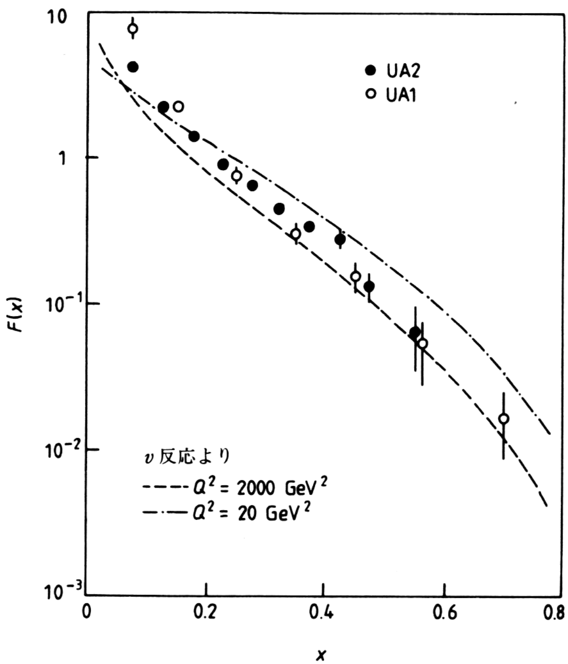


図 9.17　2 枝ジェット事象で測定された有効構造関数（Arnison *et al*., 1984 および Bagnaia *et al*., 1984）．破線および鎖線はニュートリノの深非弾性散乱により得られた曲線．Di Lella（1985）より引用

つけるには，破砕のある模型（検出器の応答を含むQCDに基づいたモンテ・カルロ模擬法）がいる．高次のQCD効果も含まれるべきであるが，その完全な計算はまだできていない．その効果はふつう全体にある因子 $k \lesssim 2$ を乗ずることでとり入れたことにしている（Furman, 1982）．系統的な実験上の不確定は，カロリメーターのエネルギー衡正，検出器の受容限界，およびビーム全体の明るさにある．全般的にいって，絶対値に関しては，実験と理論はおよそ因子2の範囲でのみ比較できるであろう．にもかかわらず，2枝ジェットのデータは，短距離の摂動的QCDの基本的な予言を強く支持している．

9.4.2　3枝ジェット

衝突器領域の高 $\sum E_{\mathrm{T}}$ 現象の大部分は2枝ジェット事象であるが，約10～30

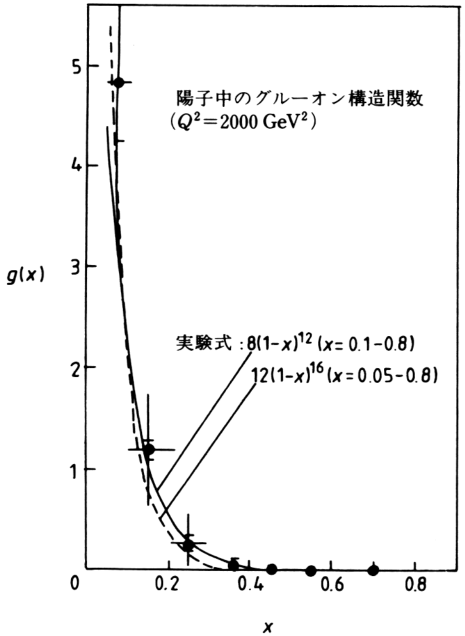


図9.18　グルーオンの構造関数 $g(x)$．有効構造関数 $F(x)$ よりクォークおよび反クォークの寄与を差し引いて得られる（Geer, 1986）

%の場合，エネルギーは3つのジェットの間で分割される．その一例は図9.15の(*d*)として示してあるが，より明析な例は図9.19に掲げてある．QCDではこれらの事象は2つのパートンが2つのパートンとひとつのグルーオンになる過程で，*gg*→*ggg*，qq→qqqなどのタイプである．再び，図9.20に示してあるようなα_sの小さいとき効くはずの枝線図形をすべて計算することができる(Kunszt & Piétarinen, 1980, Gottschalk & Sivers, 1980, Berends *et al*., 1981)．これは一括してQCDの単制動輻射の図形と呼ばれている．それぞれ互いによく分離し，かつビームの衝突方向から十分はずれている3枝ジェットの解析により，データはQCDの最低次の予言とよく一致することが判明した．例えば，図9.21はUA2実験の生成の角分布を示す(Appel *et al*., 1986)．θ^*は3枝ジェットの重心系における主ジェット（もっともエネルギーの高い分枝）の運動量とビームのなす角である．2枝ジェットと同じ$\sin^{-4}(\theta^*/2)$の曲線にのっている(2枝ジェットのデータも同じ図に示してある)が，これは質量を持たない量子の交換によって期待されるところである．この特別な曲線は典型的なgg

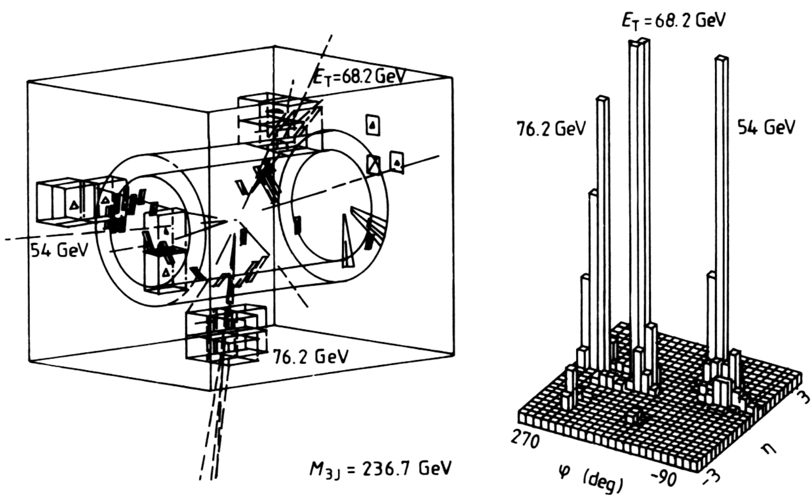


図9.19 UA1実験における3枝ジェット事象と，それに伴う横エネルギーの流れの分布 (Geer, 1986)

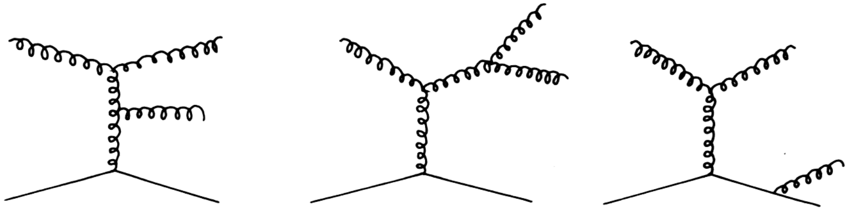


図 9.20　3 枝ジェット事象に結びつく枝線図形

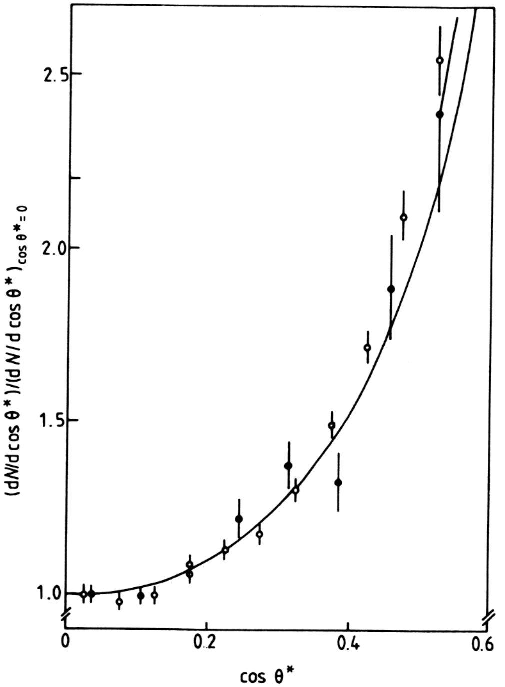


図 9.21　cos θ^* の分布．黒丸（●）で表した点は $p\bar{p}$ 衝突の 3 枝ジェット事象に対してその主要ジェットとビームの方向のなす角の余弦．ただし cos $\theta^*=0$ の値を 1 として規格化してある．（Appel *et al*., 1986）．2 枝ジェット事象に対する分布も白丸（○）で示してある．曲線は gg→ggg 過程の枝線図形を用いたパートン模型の計算を示す．ただし発散（式(9.70) のあとの注意を参照）を除くため横運動量と前方角度について切り捨て（カット・オフ）を行ってある

→ ggg 過程である．もうひとつの定性的特徴は，3 枝ジェットと 2 枝ジェットの生成比がほぼ α_s で制約されていることである（図 9.20 と表 9.1 の図形を比較せよ）．α_s を正確に決めることは難しいが，$Q^2 \sim 4000\ \mathrm{GeV}^2$ でおよそ期待される範囲 0.15〜0.25 に入っているようである．

このほか興味ある分布は，3 枝ジェットの最終状態の特徴である．この点については $\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ 衝突器の代わりに $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 衝突による 3 枝ジェットを考えた方がよい．QCD によれば，これらは図 9.22 に示すように，2 枝ジェットのパートン模型過程 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \gamma^* \to \mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}$ のグルーオン・制動輻射補正からである．この過程の存在は Ellis *et al*. (1976b) によって予言され，引き続き Brandelik *et al*. (1979) と Barber *et al*. (1979) によって観測されて，初期の QCD をおおいに鼓舞した．状況は $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 衝突の場合は $\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ 衝突より格段に簡単でかつ汚れていない．初めの状態の“パートン”は完全に物理的な QED 量子であり，全 4- 運動量はゼロであるから，ジェットの 3 つの枝は共面である．さらに，この場合ひとつのタイプの図しかないが $\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ の場合はたくさんの図がある．また図の多くは，より単純な QED の頂点も含む．図 9.22 の予言する断面積は，$\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 衝突による 3 枝ジェットの生成のみならず，$\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 全消滅断面積への QCD 補正，深非弾性散乱のスケーリング則の破れ，などにも重要であるから，やや詳しく取り扱ってみよう．

図 9.22 に示すように，クォーク・反クォーク・グルーオンの 4 運動量をそれぞれ p_1，p_2，p_3 とし e^+，e^- の 4 運動量をそれぞれ k_1，k_2 とする．断面積は

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5}\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2-p_3)\frac{|F|^2}{2Q^2}\frac{\mathrm{d}^3p_1}{2E_1}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{2E_2}\frac{\mathrm{d}^3p_3}{2E_3} \tag{9.55}$$

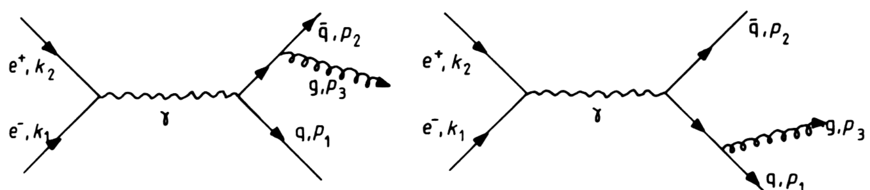


図 9.22　パートン模型の 2 枝ジェット過程におけるグルーオン制動輻射の補正

で与えられ（式(5.90)参照）質量をすべて無視するとき不変振幅 F は

$$F=\frac{e_{\mathrm{a}}e^2g_{\mathrm{s}}}{Q^2}\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)\left(\bar{u}(p_1)\gamma_\nu\frac{\lambda^\alpha}{2}\cdot\frac{(\not{p}_1+\not{p}_3)}{2p_1\cdot p_3}\cdot\gamma_\mu v(p_2)\right.$$
$$\left.-\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\cdot\frac{(\not{p}_2+\not{p}_3)}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\nu v(p_2)\right)\varepsilon^{*\nu}(\lambda)a^\alpha \tag{9.56}$$

である．ここに $Q^2=4E^2$ は全 e^+e^- エネルギーの 2 乗，Q は仮想光子の 4-運動量の 2 乗，e_{a} は（電気素量 e を単位とする）タイプ "a" のクォークの電荷である．式(9.56)のマイナス符号に注意して欲しい．これは反クォークの結合が $-g_{\mathrm{s}}$ だからである．a^α はグルーオンのカラー波動関数（$\alpha=1, 2, \cdots 8$）で，クォーク・反クォークのカラー波動関数は u，v の中に含まれていると解釈する．カラー部分は Dirac の跡の部分から分離しているから，まずはじめにカラー部分を無視し，最後にカラー和（問題 9.3）の結果を考慮することにする．$e^\pm$ のスピンについて平均し，終わりのクォークのスピンとグルーオンの偏りについて足す（式（5.170）参照）と

$$\frac{1}{4}\sum_{\mathrm{spins},\lambda}|F|^2=\frac{e^4e_{\mathrm{a}}^2g_{\mathrm{s}}^2}{8Q^4}L^{\mu\nu}(k_1,\ k_2)H_{\mu\nu}(p_1,\ p_2,\ p_3) \tag{9.57}$$

を得る（問題 9.4）．ここでレプトンのテンソルは例のごとく（式(6.88)）

$$L^{\mu\nu}(k_1,\ k_2)=2(k_1^\mu k_2^\nu+k_1^\nu k_2^\mu-k_1\cdot k_2g^{\mu\nu}) \tag{9.58}$$

ハドロンのテンソルは

$$\begin{aligned}H_{\mu\nu}(p_1,\ p_2,\ p_3)=&\frac{1}{p_1\cdot p_3}[L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3)-L_{\mu\nu}(p_1,\ p_1)+L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)]\\&+\frac{1}{p_2\cdot p_3}[L_{\mu\nu}(p_1,\ p_3)-L_{\mu\nu}(p_2,\ p_2)\\&+L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)]\\&+\frac{p_1\cdot p_2}{(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}[2L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)+L_{\mu\nu}(p_1,\ p_3)\\&+L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3)]\end{aligned} \tag{9.59}$$

である．式(9.58)，(9.59) より 5 重微分断面積の完全な形が得られる（Ellis *et al*., 1976b)．

まだ e^+e^- 衝突のデータはこのような詳細な微分断面積を研究できるほど集まっていないから，3 つのジェットを含む生成平面の配位（ビーム軸に相対的

な)を記述する 3 つの角について積分する．積分したのちでは，2 重微分断面積は 2 つの独立な Lorentz 不変な変数の関数である．独立な変数は 3 つの量 s_{ij}

$$s_{ij}=(p_i+p_j)^2 \tag{9.60}$$

のうち 2 つを用いると便利である．一貫して質量を無視する場合 $p_i^2=0$ を考えているので

$$s_{ij}=2p_i\cdot p_j \tag{9.61}$$

とも書ける．これらの変数は線型条件

$$2(p_1\cdot p_2+p_2\cdot p_3+p_3\cdot p_1)=Q^2 \tag{9.62}$$

で結ばれているが，これは

$$(p_1+p_2+p_3)^2=Q^2 \tag{9.63}$$

と $p_i^2=0$ の結果である．配位についての積分の結果は

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}s_{13}\mathrm{d}s_{23}}=\frac{2}{3}\alpha^2 e_a^2\alpha_s\frac{1}{(Q^2)^3}\left(\frac{s_{13}}{s_{23}}+\frac{s_{23}}{s_{13}}+\frac{2Q^2s_{12}}{s_{13}s_{23}}\right) \tag{9.64}$$

である（Ellis *et al*., 1976 b)．ここに $\alpha_s=g_s^2/4\pi$ とおいた．

この結果の形を次のように簡単に理解することができる．生成角について積分したあとで，k_i の方向に関する情報はすべて失われてしまうのだから，レプトンのテンソルは $Q^2g^{\mu\nu}$ に比例する，と考えるのは妥当である．実際，$-g^{\mu\nu}L_{\mu\nu}(p,p')=4p\cdot p'$ と式(9.59) を用いればただちに

$$-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}H_{\mu\nu}=\frac{p_1\cdot p_3}{p_2\cdot p_3}+\frac{p_2\cdot p_3}{p_1\cdot p_3}+\frac{p_1\cdot p_2Q^2}{(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}=\frac{s_{13}}{s_{23}}+\frac{s_{23}}{s_{13}}+\frac{2Q^2s_{12}}{s_{13}s_{23}} \tag{9.65}$$

を得るが，これは正確に式(9.64) の中の因子である．

逆に，この結果は簡単な物理的解釈を与えることができる．式(5.168) より $-g^{\mu\nu}$ を $\sum_{\lambda'}\varepsilon^\mu(\lambda')\varepsilon^{\nu*}(\lambda')$ で置き換えられることに注目する．λ' は仮想光子の偏りで $\lambda'=0$ 状態は負の寄与を行う．したがって角積分を行った結果は実効的に（定数および Q^2 を別にして）レプトンの因子 $\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)$ を $-\mathrm{i}\varepsilon^\mu(\lambda')$ で置き換えることに等しく，図 9.23 に示すように F は $\gamma^*\to \mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}\mathrm{g}$ の過程に比例する．しかしこれらは，すでに Compton 散乱（6.9 節参照）で遭遇した振幅と本質的に同じである．6.9.2 項の結果と比較するため，初めの状態のフェルミオン（電子/クォーク）を終わりの状態の反フェルミオン（陽電子/反クォーク）に転換して $p\to -p$ と置き換え，図 9.23 の変数と図 6.13(a) の変数を

$$p' \to p_1,\ k' \to p_3,\ -p \to p_2\ ;\ s \to 2p_1 \cdot p_3 = s_{13},\ t \to 2p_1 \cdot p_2 = s_{12},$$
$$u \to 2p_2 \cdot p_3 = s_{23} \tag{9.66}$$

と置き換えて同定する．式（6.189）の中で仮想光子 γ は 4-運動量の 2 乗 $-Q^2$ を持つことに注意し，式(6.189) の Compton 不変振幅 "$\sum|F|^2$" は，予想どおり因子式(9.65)に比例することがわかる．

ここに論じているような形の 3 体終状態では，s_{ij} の間の対称性を保存して，3 つの無次元変数 x_i

$$s_{23} = Q^2(1-x_1)\quad \text{およびその巡環} \tag{9.67}$$

を用いるのが便利であることが多い．3 つの x_i は式(9.62) にあたる条件

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{9.68}$$

で結ばれている．変数の組 $\{x_i\}$ の値で決まる事象は，図 9.24 に示すように高さ 1 の正三角形 の中の一点で表すことができる．のちの議論に必要だからこの x_i-空間中で物理的に許される極限を求める．3 体系全体の重心系から，2 および 3 の重心系（図 9.25 参照）に移る．$\tilde{\theta}$ がこの系における 1 と 3 の間の角とすれば

$$\begin{aligned} x_2 &= (1-x_1/2) + (x_1/2)\cos\tilde{\theta} \\ x_3 &= (1-x_1/2) - (x_1/2)\cos\tilde{\theta} \end{aligned} \tag{9.69}$$

である（問題 9.25）．物理的な領域の極限は明らかに $\cos\tilde{\theta} = \pm 1$ で与えられ，これは $x_2=1$ と $x_3=1$ に対応する．対称性から，図 9.24 の三角形の全周が元の境界であるから，物理的な事象を表す点は必ず三角形の内部に落ちる．（これは K $\to 3\pi$ の解析のためはじめて Dalitz (1953) によって導入された古典的な Dalitz 作図で，質量を 0 においた極限になっている．）図 9.24 には $\tilde{\theta}$ が一定の曲線が

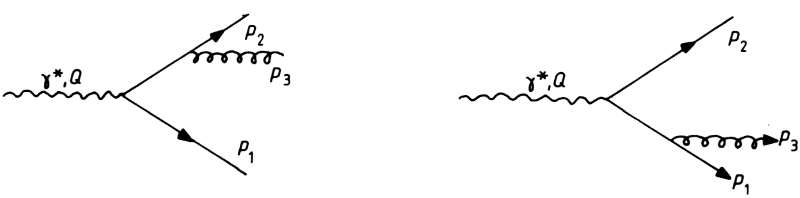


図 9.23　$q\bar{q}g$ に崩壊する仮想光子

示してある．

さて QCD の制動輻射過程で与えられる分布を考えよう．式(9.64) は

$$\frac{1}{\sigma_{\mathrm{pt}}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\frac{2\alpha_{\mathrm{s}}}{3\pi}\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}\right) \tag{9.70}$$

と書いても等価である．ここに σ_{pt} は式(7.88)の点状パートン → ハドロン過程の全断面積である．因子 4 をカラー和として乗じてある (問題 9.3)．式(9.65)の大かっこの中の因子は x_i で書いてある (問題 9.6)．式(9.70) のもっとも顕著な特徴は，x_1, x_2 あるいはこの双方が 1 に近づくにしたがって無限大になることである．これは 5.9 節や 6.10 節で言及した閉線の積分で遭遇した無限大とはまったく異なる無限大である．積分はひとつも含まれていない ― が，3 つの振幅自身が相空間の境界で特異的になる．この無限大の原因を追ってゆくと，式

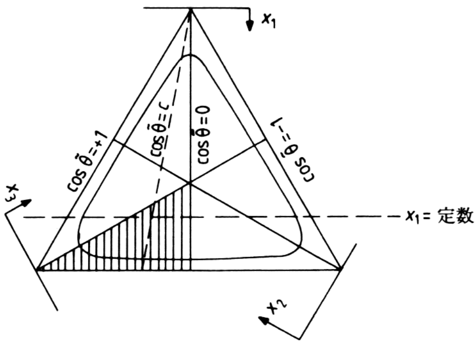


図 9.24　$\{x_i\}$ が運動学的に許される領域は正三角形の内部である

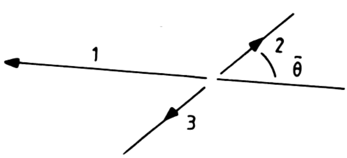


図 9.25　$\tilde{\theta}$ の定義

(9.56) の中の分母の因子 $(p_1 \cdot p_3)^{-1} \sim (1-x_2)^{-1}$ および $(p_2 \cdot p_3)^{-1} \sim (1-x_1)^{-1}$ に行きつく．これらの因子はグルーオンの運動量が

$$\text{(a)} \quad p_3 \propto p_1 \quad \text{もしくは} \quad p_3 \propto p_2 \quad (p_i^2 = 0 \text{ を用いる}) \tag{9.71}$$

$$\text{(b)} \quad p_3 \to 0 \tag{9.72}$$

の値をとる 2 つの場合に 0 になる．その物理的解釈は容易である．条件(a)は，グルーオンの 4-運動量がクォークか反クォークの 4-運動量と平行な場合である．これを“共線発散”[†]といい，その配位を図 9.26(a) に描いてある．条件(b)に非常に“やわらかい（運動量の小さい）”グルーオンの射出（図 9.26(b)）であり，“やわらかい発散”と呼ばれる．これらの図形から，2 つの場合のどちらでも，観測にかかる最後の状態のハドロンは，分裂過程ののちでは，実際は 2 枝ジェットの配位に似てくることが明らかである．このような事象は，運動学的図形，図 9.24 の $x_1 \approx 1$ および/または $x_2 \approx 1$ の領域に落ちる．これは三角形の 2 つの境界に隣接した短冊形か，頂点の付近の領域に対応する．丸みを帯びた三角形（おむすび型）の内部の事象は大方 3 枝ジェットである．

しかし，観測されたジェットのうちどれがクォーク（あるいは反クォーク）の，どれがグルーオンの破砕から生じたかはすぐにはわからない．したがって実用上は，“1”がクォーク，“2”が反クォーク，“3”がグルーオンという同定化をやめ，x_1 はもっともエネルギーの高いジェット，x_2 は次にエネルギーの高いジェット，x_3 はもっともエネルギーの低いジェットをさすものとする．この

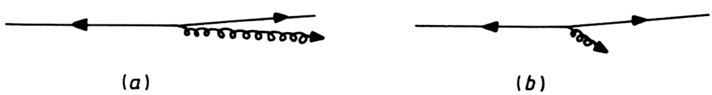


図 9.26　式(9.70) を発散させるようなグルーオンの配位　(*a*) クォーク（または反クォーク）とほぼ同じ方向に放出されるグルーオン　(*b*)軟らかい（低エネルギーの）グルーオンの放出．事象は全体の重心系で観察したもの

[†](原注) あるいは“質量特異性”ともいう．グルーオンかクォークかのどちらかが質量を持てば起こらない無限大だからである．

ようにすると，全三角形内の事象は実効的に図 9.24 の斜線をつけた 1/6 の部分 $x_1>x_2>x_3$ におさまる．3 枝ジェットを遊離するためには三角形の境界から離れていなくてはならないから，図 9.24 の丸まった線の内部の事象のみ以下の議論で考えてゆく．(しかし，式(9.70)で予言される全断面積を計算するためには，境界の領域をどう算入するかわからなくてはならない．これは次の節で論ずる．)特に興味ある分布は，グルーオンのスピンを示す決め手として早くから提案され（Ellis & Karliner，1979）実験された（Brandelik *et al*.，1980）$\cos\tilde{\theta}$ に関する分布である．問題 9.7 の示すように，図 9.23 のグルーオンがスピン 0 を持てば，式(9.65) は

$$-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}H^{\mathrm{s}}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_1\cdot p_3}{p_2\cdot p_3}+\frac{p_3\cdot p_2}{p_1\cdot p_3}+2\right)=\frac{x_3^2}{2(1-x_1)(1-x_2)} \tag{9.73}$$

のようにかわり，断面積の式(9.70) は

$$\frac{1}{\sigma_{\mathrm{pt}}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\frac{\alpha'_{\mathrm{s}}}{3\pi}\left(\frac{x_3^2}{2(1-x_1)(1-x_2)}\right) \tag{9.74}$$

となる．ここに $\alpha'_{\mathrm{s}}=g'^2_s/4\pi$ はスカラー・グルーオン" に対する QCD の α_{s} 類似の結合定数である．明らかに，x_1 を固定したとき式(9.70) と (9.74) の $\tilde{\theta}$ 依存性は異なる(式(9.69)参照)．実際，式(9.70)の x_1 の巡循について和をとり(Dalitz 図のたたみ込みにあたる)，式(9.69) を用いれば，x_1 を固定し $\cos\tilde{\theta}=0$ の値を 1 に規格化したとき角分布は

スピン 1 に対して

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\tilde{\theta}}=\{1+[3(2-x_1)x_1^2\cos^2\tilde{\theta}]/[4x_1^3+(2-x_1)^3]\}/(1-\cos^2\tilde{\theta}) \tag{9.75}$$

スピン 0 に対して

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}\cos\tilde{\theta}}=\{1+[x_1(3x_1-4)\cos^2\tilde{\theta}]\cos^2\tilde{\theta}]/(4-3x_1^2)\}/(1-\cos^2\tilde{\theta}) \tag{9.76}$$

となる (問題 9.8)．式(9.75)，(9.76) の形ではあまりはっきりとわからないが，本質的な物理的論点は，“スカラー・グルーオン” の予言する式(9.76) は $x_1\sim1$, $x_2\sim1$ の付近でベクトル・グルーオンの予言する式(9.75) より特異性が少ないということである．式(9.70) は x_1 と x_2 のどちらかが 1 に近迫するとき発散するが，式(9.74)は発散しない．その点で $x_3=0$ になるからである．3 つの変数について対称化を行うと，式(9.70) は $\tilde{\theta}$ の分布(9.75) を与え，$x_1=1$ のとき $\cos^2\tilde{\theta}$

＝1 で特異的になる．一方“スカラー”の分布(9.76) は $\cos^2\tilde{\theta}=1$，$x_1=1$ で特異的ではない．これより式(9.75) は式(9.76) より $\cos^2\tilde{\theta}$ についてより鋭い立ち上がりを示すという結果になる．Ellis & Karlimer (1979) は，$\cos\tilde{\theta}\leqq 1/2$，$x_1\fallingdotseq 0.8\sim 0.9$ でしかるべき近似式は

$$\text{スピン}\quad 1 \qquad \frac{d\sigma}{d\cos\tilde{\theta}}\simeq 1+2\cos^2\tilde{\theta} \tag{9.77}$$

$$\text{スピン}\quad 0 \qquad \frac{d\sigma}{d\cos\tilde{\theta}}\simeq 1+0.2\cos^2\tilde{\theta} \tag{9.78}$$

となることを示した．図 9.27 は Brandelik *et al.*(1980) の初期のデータである．残念なことに，事象を選択する規準 ($x_1<0.9$) が非常に強い制約になるので分布は $\cos\tilde{\theta}\sim 0.8$ で 0 にならなくてはならない．これは式(9.75)，(9.76) が大きく異なる領域であるが．どちらの分布も同じ事象の数 248 に規格化されているから，図 9.27 に示すように $\cos\tilde{\theta}$ の小さい値での違いに転換せざるを得ない．しかしデータはスピン 1 のグルーオンに明らかに有利である．より最近のデー

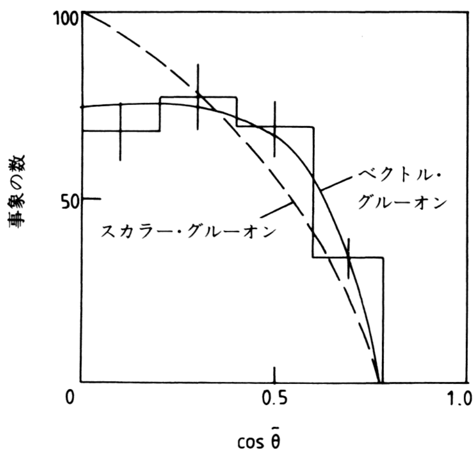


図 9.27　$e^+e^-\to 3$ 枝ジェット事象の分布．領域 $1-x_1\gtrsim 0.10$ において，本文中に定義された Ellis-Karliner 角 $\tilde{\theta}$ の余弦の関数として観測されたデータ (Brandelik *et al*., 1980)．実線の曲線は QCD の予言，破線の曲線はスカラー・グルーオンの予言を表す．ともに全観測事象の数に規格化してある．

タ（Behrend *et al*., 1982）もこの結論を支持している．

UA2 協同研究団は e^+e^- 消滅で得られるよりも多くの 3 枝ジェット事象を集めた．図 9.28 は，$0.84 \leq x_1 \leq 0.96$ の範囲で観測したおよそ 1000 個の事象の $\cos\tilde{\theta}$ 分布である．これは明らかに式(9.75) から期待される形に似ている．もちろん不利なことは，この場合パートン階層での過程は e^+e^- の場合に計算した光子からはじまる過程より複雑で，簡単に解釈するのは難しい．しかしいくつか定性的な主張を行うことができる．まず第一は次のような興味ある事実が目につく．振幅(9.56) は，$(p_1 \cdot p_3)^{-1}$ と $(p_2 \cdot p_3)^{-1}$ の因子を含むにもかかわらず，断面積(9.64) は $(p_1 \cdot p_3)^{-2}$ も $(p_2 \cdot p_3)^{-2}$ も含まずに，$(p_1 \cdot p_3)^{-1}$，$(p_2 \cdot p_3)^{-1}$ の因子しか含まない．すなわち 2 位の極が消去されて 1 位の極しか残さない．実際これは，スピン 1/2 およびスピン 1 の粒子を含む制動輻射タイプの 3 枝ジェットの一般的特徴（Berends *et al*., 1981）である．式(9.69) によって，式(9.75)

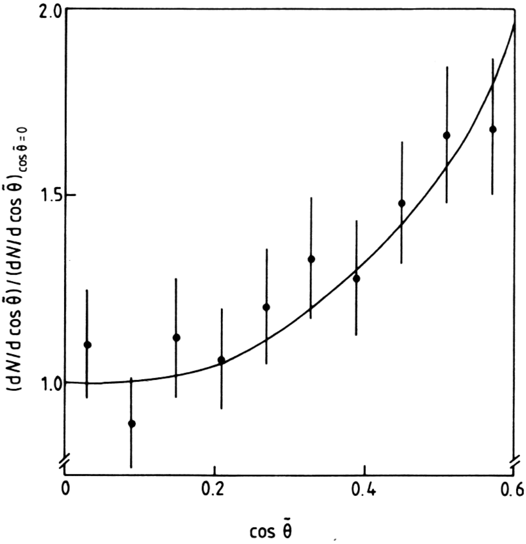


図 9.28 $p\bar{p}$ 衝突における 3 枝ジェットの $\cos\tilde{\theta}$ の分布（Appel *et al*., 1986）．$\cos\tilde{\theta}=0$ で 1 に規格化してある．曲線は $gg \to ggg$ 過程に対する QCD の枝線図形からの予言．ただし図 9.21 の説明に述べたと同じ切り捨て近似をとっている

中の特徴的な因子 $(1-\cos^2\tilde{\theta})^{-1}$ へ導くのは因子 $[(p_1\cdot p_3)\cdot(p_2\cdot p_3)]^{-1}$ である．したがって $\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ の場合でもこの因子は存在し，$1+\alpha\cos^2\tilde{\theta}$ の形の分子を伴って図 9.28 の曲線になる．図は実際 $1+2\cos^2\tilde{\theta}$ と矛盾しない．またこの図には典型的な QCD の寄与からの予言も載せてある（どれも同じような $\cos\tilde{\theta}$ 分布を示す）．データと QCD の予言とはよく一致する．

9.5　全断面積 $\sigma(e^+e^-\to$ ハドロン$)$ に対する QCD の予言

いまや簡単なパートン模型による e^+e^- 消滅でハドロンを生ずる全断面積の QCD 補正という重要な問題を取り上げることができる（40 ページの脚注参照）．図 9.29に再び基本的なパートン模型の図形を示しておいた．これは振幅 F_γ を与える．図 9.30 には α_s の 1 次のけたの QCD 補正の図形を掲げる．これらの過程の振幅和を $F_{g,v}$ と書く．“v” は “仮想の” という心算で，図形はいずれもグルーオンの放出と再吸収を含む．全断面積は $|F_\gamma+F_{g,v}|^2$ に比例するが，ここに問題を生ずる．

図 9.30 のグルーオン閉線は高い運動量領域でもちろんいつもの（“紫外”）発散を生ずる．しかし，振幅は（仮想的な）グルーオンの運動量がゼロに近迫す

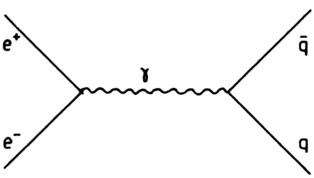


図 9.29　$e^+e^-\to\bar{q}q$ 過程の 1 光子消滅の振幅

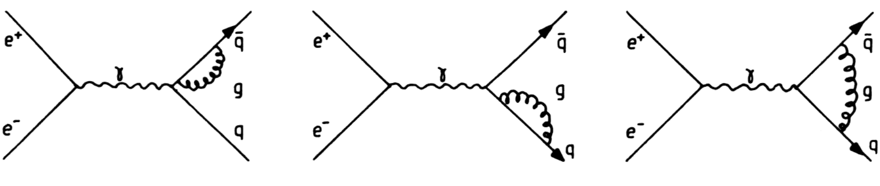


図 9.30　図 9.29 の図形の仮想グルーオンによる補正

るときもまた発散する．このような“やわらかい”発散は，閉線の中で起こるときふつう“赤外”発散と呼ばれるが，くりこみによっては除けない．くりこみは Feynman 積分の高エネルギー (紫外) 発散にのみ有効である．くりこみは赤外発散の問題を解決しない．

実際，図 9.30 のグルーオン閉線はクォークの質量がゼロになる極限で，閉線中のクォークやグルーオンが“共線”配位をとるとき別の（紫外でない）発散を生ずる．これははじめから意外ではない．閉線中のグルーオンの運動量はすべての可能な値にわたるのだから，前節に論じた図 9.22 の実グルーオン放出に伴う困難を引き起こした領域をも含む．実際，図 9.30 のやっかいな発散を処理する鍵を与えるのがこの過程である．今回は，実際に $q\bar{q}$ の全消滅断面積の意味する量とは何か，を注意深く解析することが無限大の救済になる．要点は，外へ出てゆくクォーク（あるいは反クォーク）は，やわらかい（あるいは共線の）グルーオンを伴うクォーク（反クォーク）と運動学的に区別がつかない，ということである．ちょうど，しかるべき運動学的領域では，2 枝ジェットと 3 枝ジェットの間にあるあいまいさがあることは前節で見たとおりである．したがって，$|F_\gamma+F_{g,v}|^2$ にはさらに，この危険な運動学的領域におけるやわらかい（および共線の）グルーオン生成の全断面積の寄与を付け加えなくてはならない．これは式(9.70) を図 9.24 中の三角形の境界と“まるまった”内部三角形（おむすび形）の間の面積（ϵ と呼ぶ）にわたって積分して得られる量

$$\sigma_{g,r}=\sigma_{pt}\frac{2\alpha_s}{3\pi}\iint_\epsilon\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}dx_1dx_2 \tag{9.79}$$

である．ここで添え字 r は“実”の意味である．明らかに，領域 ϵ (なんらかの形でパラメーター化されている）がゼロに近迫するとき，式(9.79) は分母が 0 になって発散する（やわらかい発散および共線の発散)．

この精密化は一見何の役にも立たないように見える．今や 2 つの無限大を心配しなくてはならない．と，ここで奇跡が起こる．$|F_\gamma+F_{g,v}|$ を 2 乗すると 3 つの項が出る．α^2 のけたの項（$|F_\gamma|^2$ より)，$\alpha^2\alpha_s^2$ のけたの項（$|F_{g,v}|^2$ より）および $\alpha^2\alpha_s$ のけたの干渉項であり，これは式(9.79) と同じけたである．したがって $\alpha^2\alpha_s$ のけたで式(9.79) にこの干渉項をつけ加えなくてはならず，すばらしいことには 2 つの発散が正確に打ち消しあってしまう．$\alpha^2\alpha_s$ のけたまでの完全な断

面積は

$$\sigma=\sigma_{\mathrm{pt}}(1+\alpha_{\mathrm{s}}/\pi) \tag{9.80}$$

である（例えば Pennington, 1983）.

実および仮想粒子の生成過程の間で特異性がみごとに打ち消すということは，実は一般的な結果であって QED の場合木下（1962）や Lee & Nanenberg (1964) によって証明された.（ここに考えている過程では QCD でも実効的に同じである.）次の節でも再びこの事実に出会うであろう. これ以上の議論は例えば Lee（1981, 23.5 節）に述べられている.

一見すると式(9.80)は完全に満足すべきものに思われる. α_{s} がまったく小さい(0.15～0.25)と考える理由があるからである. しかしながらこれは幻想であって，$\alpha^2\alpha_{\mathrm{s}}^2$ のけたの高次の過程を考えるや否や夢散してしまう. このけたに寄与する典型的な図形の一部は図 9.31 に掲げてある. 再び図 9.22 と図 9.31 の干渉項として $\alpha^2\alpha_{\mathrm{s}}^2$ の項が出る. ところがこのような図形をすべて含んだ結果は，式(9.80) の α_{s} を式(9.40) で与えられる Q^2 に依存する $\alpha_{\mathrm{s}}(Q^2)$

$$\alpha_{\mathrm{s}}(Q^2)=\alpha_{\mathrm{s}}(\mu^2)\left(1-\frac{\alpha_{\mathrm{s}}(\mu^2)}{12\pi}(33-2f)\ln\frac{Q^2}{\mu^2}+\cdots\right) \tag{9.81}$$

で置き換えたものになっている. さてここで満足は嘆きにかわる. $\alpha_{\mathrm{s}}(Q^2)$ は，$\alpha_{\mathrm{s}}(\mu^2)$ がどんな値であるにせよ Q^2 によって非常に大きい値になり得る. したがって摂動の結果の式(9.80), (9.81) は結局無意味になる.

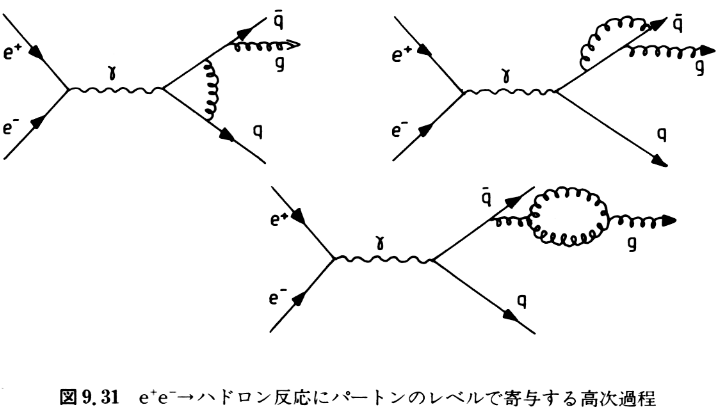


図 9.31　$e^+e^-\to$ハドロン反応にパートンのレベルで寄与する高次過程

もちろん，逃げ道はある．9.3 節ですでに論じたように，このような対数の無限級数をすべて足すことができ，したがって式(9.81) は実は $\alpha_s(\mu^2)$

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+(\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(33-2f)\ln(Q^2/\mu^2)} \tag{9.82}$$

の冪展開にほかならない．これは $Q^2 \to \infty$ に対してもおとなしいふるまいを示し，漸近自由性の結果を与える．したがって最終的に，$e^+e^- \to$ ハドロン過程の "対数的主要" 項の予言は

$$\sigma = \sigma_{pt}(1+\alpha_s(Q^2)/\pi) \tag{9.83}$$

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2f)\ln(Q^2/\Lambda^2)} \tag{9.84}$$

で与えられる．式(9.83) は基本的な結果である．これは簡単なパートン模型の結果 σ_{pt} は $Q^2 \to \infty$ にしたがって正確になることを示し，点状の断面積 σ_{pt} に対する $1/\ln Q^2$ のけたの補正の正確な形を与えるからである．

しかし，残念なことに式(9.83) で話は終わらない．まず第一に，α_s のこれ以上の高次の補正が考慮されるべきであるが，その取り扱いはきわめて技術的になる．また式(9.82)（とその補正）を用いて実験的に $\alpha_s(Q^2)$ の Q^2 依存性を検証しようとするのは結構だが，Q^2 の小さい領域では $\alpha_s(Q^2)$ の Q^2 依存性が大きく "対数的主要項の摂動論 (9.83)" が正しいかどうかわからず，Q^2 の大きい領域 ($Q^2 \gtrsim 30\,\mathrm{GeV}^2$) では $\alpha_s(Q^2)$ の依存性が小さくてうまくゆかない（図 9.10 参照）さらに，高い Q^2 の領域では，Z^0 共鳴（15.5.4 節に後述）の近くになるので式(9.83) への弱い相互作用の補正が重要になる．にもかかわらず，図 9.1 のデータは σ_{pt} に少くとも小さな正の補正がいることを示しているようであるし，CELLO グループ（Behrend *et al*., 1987）の解析では $\alpha_s(34\,\mathrm{GeV}^2) = 0.169 \pm 0.025$ という値を決めている．LEP の測定は α_s の Q^2 依存性の予言を，$\sigma(e^+e^- \to$ ハドロン) や σ (3 枝)/σ (2 枝) の比（これも α_s に比例）の観測によって，確認できるであろう．

自由パートン模型に対する最初の QCD 補正は，e^+e^- 消滅のスケーリングを対数的に破ることを学んだ．7.2 節で導入した構造関数にも何か同じようなことが起こるかどうか興味がある．構造関数は自由パートン模型ではスケール不変と仮定されている．これをこの章の最後の話題にしよう．

9.6　深非弾性散乱のスケーリング則の破れに対する QCD の予言

深非弾性レプトン・核子散乱に対して第7章で考えた自由パートン模型の振幅は，図 9.32 に示す形であった．最初の QCD 補正は明らかに図 9.33 に示すよ

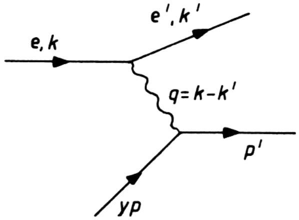


図 9.32　1光子交換による電子・クォーク散乱

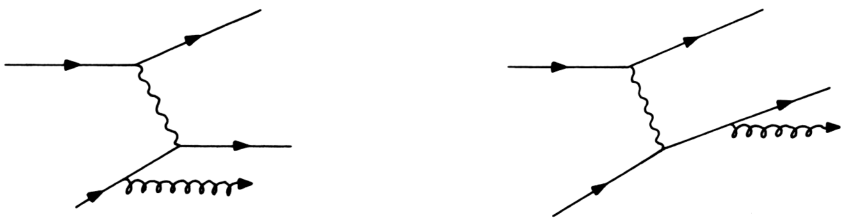


図 9.33　グルーオンをひとつ放出する電子・クォーク散乱

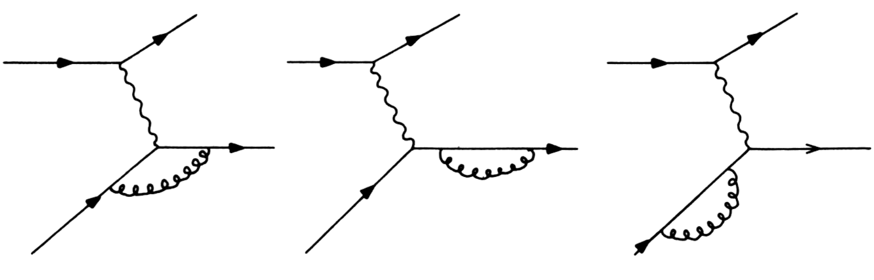


図 9.34　図 9.32 に対する仮想1グルーオンの補正

うに初めあるいは終わりのクォークが実グルーオンを放出する過程である．しかしこれに，図 9.34 に示すような仮想グルーオンの 1 閉線過程を加えて，前節で遭遇したような赤外発散を除き，また図 9.35 に示すような核子内のグルーオンの存在に対応する図形を付け加えなくてはならない．簡単にするためいわゆる“非 1 重項構造関数” F_2^{NS} を考える．これは $F_2^{ep}-F_2^{en}$ のように（フレーバーの）1 重項グルーオンの寄与が打ち消し，図 9.33 と図 9.34 の寄与しか残らない．

さてこれらの図形に対して，7.2 節で行ったものと類似の計算を行おう．これは図 9.32 の簡単なパートン過程から，e-N 構造関数 νW_2, MW_1 を見いだす計算である．ここに問題が 2 つある．そのひとつは，図 9.33 に対応するパートン階層での W を見いだすこと（図 9.34 はしばらく置く）である．これは自由なパートンの図形，図 9.32 に対する式 (7.26)，(7.27) にあたる．他は，これらパートンの W を運動量の分配について積分し，観測にかかる核子の W と関係づけることである．7.2 節で第一の問題は解いた．パートン階層であからさまに $d\sigma^i/dQ^2d\nu$ を計算し，νW_2^i，W_1^i を抽出した．過程 $e^-+q\to e^-+q+g$ に対する 5 重微分断面積から出発して，原理的には，同じことを行える．しかしもっと簡単な ― 多少発見法的な ― やり方がある．式 (7.43) より，一般に $F_1=MW_1$ は横仮想光子の断面積

$$W_1=\sigma_T/(4\pi\alpha^2/K)=\frac{1}{2}\sum_{\lambda=\pm1}\varepsilon_\mu^*(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)W^{\mu\nu} \tag{9.85}$$

によって与えられることに注意する．ここに $W^{\mu\nu}$ は式 (7.2) で定義されている．

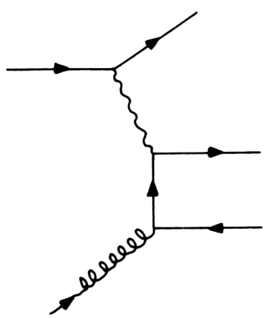


図 9.35　$q\bar{q}$ 生成を伴う電子・グルーオン散乱

さらに，Callan-Gross の関係式もそのまま成り立つ（光子は電荷を持つパートン，すなわちスピン 1/2 のクォークとしか相互作用をしない）から

$$F_2/x = 2F_1 = 2MW_1 = \sigma_T/(4\pi\alpha^2/2MK) \tag{9.86}$$

である．これらの式はパートンと陽子のどちらの W_1 と $W^{\mu\nu}$ についても成り立つ．図 9.33 のパートン階層での $2\hat{F}_1$ は，図 9.36 の図形から計算された横光子断面積を因子 $4\pi^2\alpha/2\hat{M}\hat{K}$ で割ったものである．いつものように＾印は対応するパートン過程の運動学的量を表す．しかしこの断面積は，カラー因子を別にすれば，6.9 節で計算した仮想 Compton 断面積である．また同じ（Hand の）慣行を個々の光子の入射束因子に用いて

$$2\hat{M}\hat{K} = \hat{s} \tag{9.87}$$

を得る．したがって図 9.33 のパートン過程は

$$\begin{aligned} 2\hat{F}_1 &= \hat{\sigma}_T/(4\pi^2\alpha/2\hat{M}\hat{K}) \\ &= \frac{\hat{s}}{4\pi^2\alpha}\int_{-1}^{1} d\cos\theta \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi\alpha\alpha_s}{\hat{s}}\left(-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\,\hat{t}}\right) \end{aligned} \tag{9.88}$$

である．ここで式(6.189) から式(9.88) に移行するには，カラー因子 4/3 を挿入し（問題 9.3），図 9.36 にあうよう変数を $t \to u$，$u \to t$ と読み換え，α^2 を $\alpha\alpha_s$ と置き換えた．

式(9.88)を用いて次の段階に進む前に，計算のもうひとつの部分，核子の F_1 とパートンの $\hat{F}_1$ の間の関係について考えておくと役に立つ．7.2 節の議論をまねればよいが，重大な差異がひとつある．陽子から“取られた”クォークはいぜん運動量分割 y（運動量 yp）を持つが，いま計算中のグルーオン制動輻射過程ではその縦運動量は終わりの状態では小さくなっている．グルーオンを放出したあとでのクォークの運動量を zyp（図 9.37 参照）と置く．7.2 節と同じく，

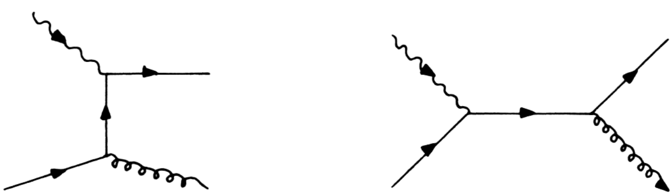


図 9.36　図 9.33 に入ってくる仮想光子過程

クォークは質量殻上にあると仮定して

$$q^2+2zyq\cdot p=0 \tag{9.89}$$

を得る．あるいは

$$x=yz,\quad x=Q^2/2q\cdot p,\qquad q^2=-Q^2 \tag{9.90}$$

から

$$\frac{F_2}{x}=2F_1=\sum_i\int_0^1 \mathrm{d}y f_i(y)\int_0^1 \mathrm{d}z 2\hat{F}_1^i\delta(x-yz) \tag{9.91}$$

と書ける（式(7.28) 参照）．ここに $f_i(y)$ は 7.2 節で導入したタイプ i のパートンの運動量分布関数（時に応じて $q(x)$，$g(x)$ とも書く），和は寄与するパートンすべてにわたる．自由なパートンに対しては，$2\hat{F}_1^i=e_i^2\delta(1-z)$ とおいて式(9.91) が式(7.31) にもどることを検証せよ（例えば Halzen & Martin, 1984, 10.3 節参照）．

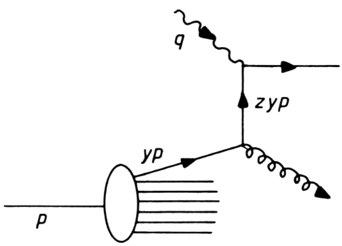


図 9.37　e⁻-核子散乱への寄与としてみた図 9.36 の過程

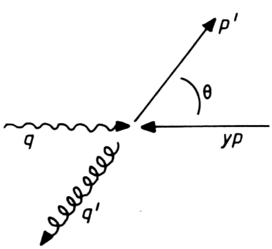


図 9.38　図 9.37 のパートン過程の運動学

式(9.88)を式(9.91)に代入して計算を行うには，重心系における $\gamma\mathrm{q}\to\mathrm{qg}$ 過程の運動学を調べる必要がある．図9.38を参照して，k, k' を重心の運動量 $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ の大きさとするとき

$$\begin{aligned} \hat{s} &= 4k'^2 = (yp+q)^2 = Q^2(1-z)/z, \qquad z = Q^2/(\hat{s}+Q^2) \\ \hat{t} &= (q-p')^2 = -2kk'(1-\cos\theta) = -Q^2(1-c)/2z, \qquad c=\cos\theta \\ \hat{u} &= (q-q')^2 = -2kk'(1+\cos\theta) = -Q^2(1+c)/2z \end{aligned} \tag{9.92}$$

が成り立つ．さて $\hat{F}_1$ の積分(9.88)で $c=\cos\theta$ について積分すると無限大の結果

$$\sim\int^1 \frac{\mathrm{d}c}{1-c} \tag{9.93}$$

が前方で0になる量 $\hat{t}$ に伴って現れる．この特異性は，クォークの質量を0と仮定したから生じたのである．クォークに小さな質量 μ を与えると伝播関数の因子 $\hat{t}^{-1}$ は $(\hat{t}-\mu^2)^{-1}$ となり，困った積分は

$$\sim\int^1 \frac{\mathrm{d}c}{[(1+2\mu^2 z/Q^2)-c]} \tag{9.94}$$

に変ずる．これは $\ln(Q^2/\mu^2)$ の形の因子を生ずるから μ で無限大を正則化することになる．これが自由なパートン模型に最低次のQCD補正を行う際に生ずる決定的な物理的結果である．これはスケーリングを破る．スケーリングを対数的に破ることは，自由なパートン模型（スケーリングが成り立つ）の補正の特徴である．

式(9.88)の中で $\hat{t}^{-1}$ に比例する項のみを残して $\ln Q^2$ の係数を計算できる．

$$2\hat{F}^i \approx \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}c}{1-c}\left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1+z^2}{1-z}\right) \tag{9.95}$$

したがってクォークの種類がただひとつであれば，このQCDの補正は

$$2F_1(x) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} f(y) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) P_{\mathrm{qq}}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{9.96}$$

となる．因子

$$P_{\mathrm{qq}}(z) = \frac{4}{3}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right) \tag{9.97}$$

は“分割関数”と呼ばれる．この関数は重要な物理的解釈を伴う．これは，クォークがグルーオンを放出したあとで初めの運動量の一部 z を持つ確率である．同

じような関数が QED でもいわゆる“等価光子近似”（Weizsäcker, 1934, Williams, 1934, Chen & Zerwas, 1975）を行うとき現れる．自由パートン模型の QCD 補正にこの技法を応用したのは Atarelli & Parisi (1977) である．これによって，以前は難しい演算子積の方法（Wilson, 1969）でのみ取り扱われていたスケーリングの破れを，より簡単により物理的に理解する途が開けた．

したがってこれまでの結果は，“自由な”クォークの分布関数 $q(x)$ が最低次のグルーオンの放出により

$$q(x)+\frac{\alpha_s}{2\pi}\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}q(y)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{9.98}$$

に修正される，ということである．しかしもちろん，式(9.98) を物理として信頼する前に，高次の過程も心配しておかなくてはならない．実際，式(9.42) の中で $\alpha_s\to\alpha_s(Q^2)$ になるような高次の過程をとりいれたとすると，付加項は漸近的自由度のよい結果（$Q^2\to\infty$ とともに $\alpha_s\to 0$ となる）を正確に打ち消すように見え，式(9.98) は疑わしくなる．この難点から抜き出すには，式(9.98) を分布関数自身が（Q^2 に依存して）変化することを表す，と解釈し

$$2F_1(x,\ \ln Q^2)=\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}[q(y)+\Delta q(y,\ \ln Q^2)]\delta\left(1-\frac{x}{y}\right) \tag{9.99}$$

$$\Delta q(x,\ \ln Q^2)=\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)\cdot\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}q(y,\ \ln Q^2)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{9.100}$$

と書く．正しい“$\alpha_s(Q^2)$ の主要項”の方程式は

$$\frac{\mathrm{d}q(x,\ \ln Q^2)}{\mathrm{d}\ln Q^2}=\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}q(y,\ \ln Q^2)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)+O(\alpha_s^2(Q^2)) \tag{9.101}$$

であることが示せる（例えば Altarelli, 1982）．ここに $\alpha_s(Q^2)$ は式(9.42) で与えられる．まとめれば，QCD は分布関数の実際の値を予言するのではなく，方程式(9.101) を通じて，分布関数の値がある Q_0^2 で与えられたとき，そこから出発して $\ln Q^2$ の関数としてどう“発展”してゆくか予言する．

方程式(9.101) は Altarelli-Parisi の発展方程式と呼ばれる．右辺は一般に，(図 9.35 から計算できる）クォークがグルーオンの分布から生成される項が付け加わる．グルーオンの分布の発展を記述し，これに対応する方程式があると，方程式群は閉じているはずである (Altarelli, 1982)，このような方程式は定性的に次のようなものである．$\ln Q^2$ の依存性は，質量の尺度が存在しない事実の

反映であることを見てきた．分布関数は Q^2 の変化の割合に比例して変わる $(d/d\ln Q^2 = Q^2 d/dQ^2)$．運動量分割 x を持つクォーク（仮想光子を吸収する）の分布の変化は，運動量分割 y を持つクォーク（グルーオンにのせて運動量分割 x/y を確率 $(\alpha_s/2\pi)P_{qq}(x/y)$ で輻射する）の分布を y について積分して得られる．この確率は大きな運動量分割に対しては大きい．高い運動量を持つクォークは，グルーオンを輻射して運動量を失う．したがって，分布関数は大きい x に対しては小さく，小さい x に対しては大きくなる傾向を持つ（おそいハドロンの生成状況による）．図 9.17 に示した $Q^2=2000$ GeV のグルーオン分布は，$Q^2=20$ GeV で測定された分布（de Groot *et al*., 1979）からこのようにして“発展”したもので，これらの定性的な特徴が明らかに表れている．

いろいろな Q^2 の実際のデータは，このような傾向を示す（図 9.39 および図

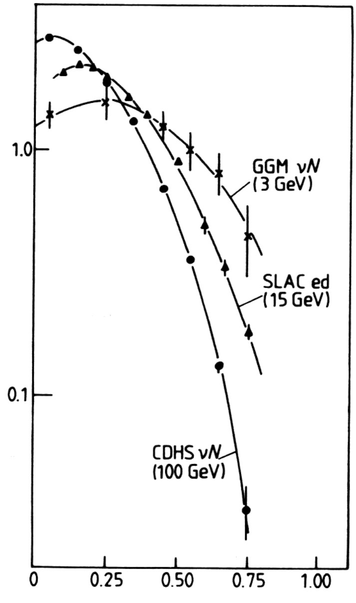


図 9.39　核子のニュートリノおよび電子散乱によって測定された構造関数 $F_2(x)$，異なるビーム・エネルギーに対応する．平均エネルギーと Q^2 が増大するにつれ，$F_2(x)$ は x の小さいところで山が鋭くなる．(Perkins D., 高エネルギー物理学入門，第3版，Addison-Wesley (1987))

9.40)．定量的分析を行うため，

$$M_n(Q^2)=\int_0^1 dx x^{n-1} q(x,\ \ln Q^2) \tag{9.102}$$

で定義される分布関数のモーメント（能率）を考えることがある．式 (9.101) の両辺のモーメントを取り x，y 積分の順序をかえると

$$\frac{dM_n(Q^2)}{d\ln Q^2}=\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\int_0^1 dy y^{n-1} q(y,\ \ln Q^2)\int_0^y \frac{dx}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{9.103}$$

となる．第 2 の積分で変数を $z=x/y$ に変え，

$$\gamma_n=-4\int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{qq}(z) \tag{9.104}$$

を定義すると

$$\frac{dM_n}{d\ln Q^2}=-\frac{\alpha_s(Q^2)}{8\pi}\gamma_n M_n(Q^2) \tag{9.105}$$

を得る．しかし式 (9.42) から

$$\frac{d\alpha_s}{d\ln Q^2}=-\frac{(33-2f)}{12\pi}\alpha_s^2 \tag{9.106}$$

であるから

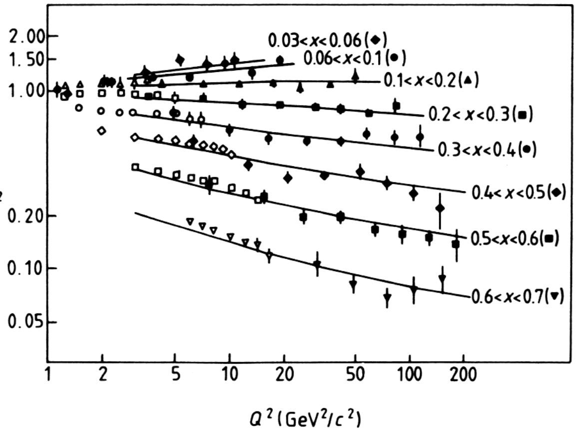


図 9.40　x のいろいろな値について $F_2(x,\ Q^2)$ を Q^2 の関数として描いた図 (de Groot *et al*., 1979)．$x=0.25$ について描いた図 7.2 (*b*) と比較せよ．曲線はクォーク分布関数の実験式から得たもので QCD による Q^2 依存性を算入してある．

$$\frac{\mathrm{d}\ln M_n}{\mathrm{d}\ln\alpha_s}=\frac{3}{2(33-2f)}\gamma_n\equiv d_n \tag{9.107}$$

となり，その解は

$$\ln M_n(Q^2)=\ln M_n(Q_0^2)+d_n\ln(\alpha_s(Q^2)/\alpha_s(Q_0^2)) \tag{9.108}$$

である．したがって

$$\ln M_n(Q^2)=(d_n/d_m)\ln M_m(Q^2)+\text{定数} \tag{9.109}$$

が出るので，あるモーメントの対数をほかのモーメントの対数に対して描けば直線になるはずで，その勾配 d_n/d_m は式(9.104)によって分割関数(9.97)から計算できる．

式(9.97)の関数 $P_{\mathrm{qq}}(z)$ は $z\to 1$ で特異性を持ち式(9.104)の γ_n の積分が発散する．これがこの節のはじめに述べた赤外発散であって，“やわらかい”グルーオンの放出に関連する．前節の $\mathrm{e^+e^-}$ 断面積の所で論じたように，図 9.34 の仮想グルーオンの深非弾性散乱の寄与を注意深く算入すれば，発散は打ち消すはずである，と期待される．これは Kim & Schilcher (1978) および Altarelli (1978 a, 1979) によってあからさまに証明された．またこれとは別に，クォークの正味の数（クォークの数から反クォークの数を引いたもの）は，どんなフレイバーについても $\ln Q^2$ が変わっても一定であるという物理的議論から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln Q^2}\int_0^1 \mathrm{d}x q(x,\ \ln Q^2)=0 \tag{9.110}$$

である．式(9.101) よりこの式は

$$\int_0^1 \mathrm{d}x P_{\mathrm{qq}}^+(z)=0 \tag{9.111}$$

を意味する．P_{qq}^+ は完全な分割関数で，グルーオン閉線の効果を含む．これは閉線の寄与（対数主要項の近似では $z\to 1$ のときのみ入ってくる）を固定する．$z\to 1$ のとき正則な任意の関数 $f(z)$ に対して，P_{qq}^+ は

$$\int_0^1 \mathrm{d}z f(z)P_{\mathrm{qq}}^+(z)=\int_0^1 \mathrm{d}z[f(z)-f(1)]P_{\mathrm{qq}}(z) \tag{9.112}$$

で定義される．この処方を γ_n に適用すれば

$$d_n=\frac{4}{33-2f}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}+4\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right) \tag{9.113}$$

を得る（問題9.9）．

放出されるグルーオンがスピン0の場合に d_n を計算するのも興味がある．そのためには然るべき $P^{s}_{qq}(z)$ が必要である．しかし，これは式(9.74)で計算される $\gamma^* \to q\bar{q}g_s'$ の確率から容易に抽出される．式(9.74) で

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \text{ の代わりに } \frac{x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \tag{9.114}$$

とおけばよい．$\gamma^*q \to qg$ 過程としてみれば，$x_2 \approx 1$，$x_1 \to z$ の領域を考えている．したがってスカラー $P^{s}_{qq}(z)$ 関数は，$x_1+x_2+x_3=2$，$x_2 \to 1$，$x_1 \to z$ より

$$P^{s}_{qq}(z)=\frac{4}{3}(1-z) \tag{9.115}$$

となり，これから

$$d^{s}_{n}=\frac{4}{33-2f}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) \tag{9.116}$$

が出る（問題9.10）．

以上すべての議論は，フレイバー1重項のグルーオン分布が発展方程式に寄

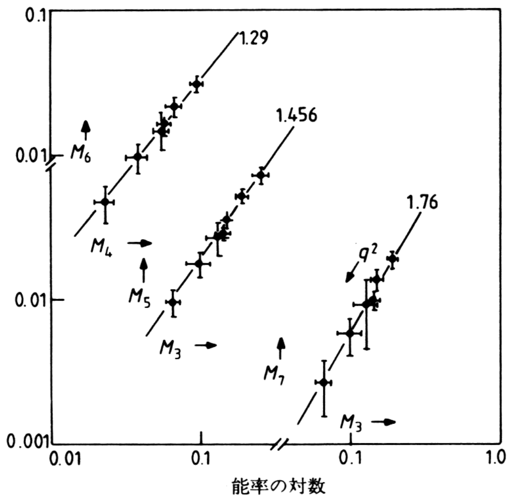


図9.41　さまざまの次数 m, n について能率 $\log M_n$ と $\log M_m$ の関係を図示したもの．ここに M_n は xF_3 の n 次の能率（式(9.102) 参照）である．QCDは一次関係(9.109) を予言し，d は式(9.113)で与えられる．予言された勾配は，観測された勾配と一致する．(Bosetti *et al.*, 1978)．

与しない場合に限って正しいことを再び強調しておく．非1重項の分布の一例はたとえば xF_3 である（この分布は ν 散乱で観測されている．11.2節に後述）．図9.41はBEBCおよびガルガメルのデータから得たモーメントの対数の作図(Bosetti *et al*., 1978) をベクトル・グルーオンの予言と比較したものである．スカラー・グルーオンの予言はまったく合わないことは明らかである．式(9.113)は $d_6/d_4=1.29$, $d_5/d_3=1.456$, $d_7/d_3=1.76$ と予言するが式(9.116)は $d_6^s/d_4^s=1.06$, $d_5^s/d_3^s=1.12$, $d_7^s/d_3^s=1.16$ と予言する．これはたしかに非常に幸先よいことであるが，初期の成功には警告が必要で，例えばPennington (1983) のようなより進んだ処理法を考えなければならない．

まとめ

(1)　カラー自由度のある証拠．

(2)　カラーの力学とQCD，グルーオン．

(3)　漸近自由性．

(4)　$p\bar{p}$ 衝突のかたい散乱過程におけるQCD枝線図形の検証．2枝ジェット，3枝ジェット．

(5)　e^+e^- 衝突における3枝ジェット．

(6)　グルーオンのスピンの検証．

(7)　$\sigma(e^+e^- \to$ ハドロン）の $\alpha_s(Q^2)$ のけたまでのQCDの予言．

(8)　深非弾性散乱のスケーリング則のやぶれに対するQCDの予言．

問題

9.1　式(9.2)の反対称な3qの組み合わせは，カラー波動関数のそれぞれに対して，変換(9.7) のもとで不変であることを示せ．

9.2　式 (9.42) を証明せよ．

9.3　この問題は式(9.77) に必要な“カラー因子”の計算である．振幅(9.56)の“カラー波動関数”の部分は

$$a^\alpha(c_3)\chi^\dagger(c_1)\frac{\lambda^\alpha}{2}\chi(c_2) \tag{a}$$

である．ここに c_1，c_2，c_3 はそれぞれクォーク，反クォーク，グルーオンのカラー自由度である，χ はクォークおよび反クォークのカラー波動関数で，3 成分の列ベクトルで表される．便利な形は

$$\chi(\mathrm{r})=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \chi(\mathrm{b})=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \chi(\mathrm{g})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

である．これは SU(2) のスピン波動関数からの類推である．実際，量 $\chi^\dagger(\lambda^\alpha/2)\chi$ は，付録 A で考えた表式 $\chi^\dagger\sigma_i\chi$ に類似するもの（σ_i はスピン行列，χ は スピン波動関数，式(A.55)，(A.56)，(A.57) を参照）で，$\chi^\dagger\sigma_i\chi$ が SU(2) のもとでベクトルの変換をするように，$\chi^\dagger\lambda^\alpha\chi$ は $\mathrm{SU(3)_c}$ 8 重項の変換を行う．これと 8 重項波動関数 $a^\alpha(c_3)$ とのスカラー積は $\mathrm{SU(3)_c}$ 1 重項（不変式）の振幅を作る．断面積は (a) の絶対値の 2 乗を作ってカラー指標 c_i について足し，

$$\sum_{c_1,c_2,c_3} a^\alpha(c_3)\chi_r^\dagger(c_1)\frac{\lambda_{rs}^\alpha}{2}\chi_s(c_2)\chi_l^\dagger(c_2)\frac{\lambda_{lm}^\beta}{2}\chi_m(c_1)a^{*\beta}(c_3) \tag{b}$$

と表される．和は χ と λ の行列指標にわたり，あからさまに書き表してある．この形では，第 6 章（式(6.72) 参照）で考えたスピンの和によく似ている．(b) を跡に変換し，次のように評価しよう．

（i）

$$\sum_{c_2}\chi_s(c_2)\chi_l^\dagger(c_2)=\delta_{sl}$$

であることを示せ．（式(6.80) 参照）

（ii） 同様な結果

$$\sum_{c_3}a^\alpha(c_3)a^{*\beta}(c_3)=\delta_{\alpha\beta}$$

を仮定して (b) が

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{8}\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha)^2$$

となることを示せ．

（iii） 付録 E に与えられた λ を用い

$$\sum_{\alpha=1}^{8} \mathrm{Tr}(\lambda^{\alpha})^2 = 16$$

となることを示せ．したがって式(9.70) のカラー因子は 4 になる．

(iv)　式(9.88) のカラー因子が 4/3 になるのはなぜか．

9.4　式(9.57) を証明せよ．

9.5　式(9.69) を証明せよ．

9.6　x_i で表したとき式(9.65)が式(9.70)の大かっこの中の表式になることを示せ．

9.7　スカラー（スピン 0）・グルーオンの場合に，式(9.56) に対応する式を書き下せ．また式(9.65) が式(9.73) で置き換えられることを示せ．

9.8　式(9.75)，(9.76) を証明せよ．

9.9　式(9.113) を証明せよ．

9.10　式(9.116) を証明せよ．

第 4 部　未完成の理論

——弱い相互作用の現象論

第 10 章　弱い相互作用

第 5 部で示す予定であるが，Glashow (1961)，Salam (1968) および Weinberg (1967) の統一された電磁・弱理論は弱い相互作用の現象論とすべて一致する．そうであるならなぜその理論をこの時点で紹介しないのか．理論は確かに注目すべく美しくよく合うのであるが，また非常に複雑で微妙であり，ある側面ではいまだ神秘的とすら言える．この理論へのある種の動機づけを試みることは教育的に必要と思われる．もっとも，一部の人々にとっては実験とよく合う，ということだけで十分かもしれない．さらに，複雑さの一部は弱い相互作用の現象それ自体の本質のうちにある．おおよそ歴史的な経過をたどりながら，弱い相互作用の現象論をまず展開することでこれらの複雑さにしだいに少しずつ入ってゆくのがよい．いずれにせよ，今まで獲得されている現象論は，多くの場合完全な理論のきわめて有用な近似であって，弱いゲージボソン $W^{\pm}$ (質量およそ 80 GeV) および Z^0 (質量およそ 90 GeV) の質量よりずっと小さいエネルギー領域でよく成り立つ (10.1 節参照)．第 12 章で実験データの事実と理論の束縛条件がなぜ (かなり特異な) 一方向 — 質量を持つゲージ量子のゲージ理論の探求 — へ進まねばならなかったかを説明しようと思う．これで第 5 部の GSW 理論の展開への準備が終わる．

10.1　Fermi 理論と中間ベクトルボソン

弱い相互作用の現象論は Fermi (1934 a, b) の時代にまでさかのぼる．β 崩壊に対して Fermi は実効的な 4 フェルミオン・点相互作用を仮定した (図 10.1)．光子が放出されるかわりに，電子とニュートリノの対がその役目を引き受けるとして，β 崩壊を電磁遷移と類似の過程と考えたのであった．Fermi の理論では，光子の放出と同じく，反応は時空間の 1 点で起こると考える．その振幅は，核子に関してはすでに論じた電磁遷移カレントに類似した弱い相互作

用のカレントを含むと仮定する．これをハドロンの弱いカレントの行列要素 $\langle p|\hat{j}_{\mu}^{wk}|n\rangle$ という．$e\bar{\nu}_e$ の対も 4-ベクトルの組み合わせ，レプトンの弱いカレントの行列要素 $\langle e\bar{\nu}_e|\hat{j}_{wk}^{\mu}|0\rangle$ として表されるとすれば†，Lorentz 不変の簡単な振幅が得られる．完全な行列要素は

$$M=\langle p|\hat{j}_{\mu}^{wk}|n\rangle\langle e\bar{\nu}_e|\hat{j}_{wk}^{\mu}|0\rangle \tag{10.1}$$

である．

発生するエネルギーがきわめて小さいから，行列要素の中ですべての運動量依存性を無視することができ，行列要素 M をひとつの実効定数 G で置き換えてよいであろう††．この定数の数値は，原子核の β 崩壊から決定される．この定数は $[M]^{-2}$ の次元を持ち，その大きさは自然単位系 $(c=\hbar=1)$ でほぼ

$$G\simeq1.14\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} \tag{10.2}$$

である．

行列要素 (10.1) の“流れ積（あるいはカレント・カレント）”の形は，ほかの弱い相互作用にも拡張できる．反粒子を取り扱うときの規則により，ニュートリノが誘発する素粒子反応

$$\nu_e+n\rightarrow p+e^- \tag{10.3}$$

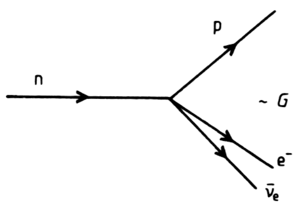


図 10.1 中性子のベータ崩壊，4 フェルミオン相互作用

† (原注)レプトンの弱いカレントの形は一見奇異に見えるかもしれない．もちろん，3.3 節(第 I 巻)の Feynman の仮定によって，もっとわかりやすい形 $\langle e|j_{wk}^{\mu}|\nu\rangle$ に書き直すことができる．

†† (原注)現在ではミューオンの崩壊に表れるこの定数を“Fermi 定数” G_F (10.5 節参照)と呼ぶ習慣である．ハドロンの弱い過程は，そのもとになるクォークのカレントや結合を用いて記述される（後章を参照）．

が存在すべきであり，これが β 崩壊と同じ強さを持つはずである．弱い“全”カレントがハドロン部分（h）とレプトン部分（l）から成ると仮定

$$\hat{j}_\mu^{\mathrm{wk}}=\hat{j}_\mu^{\mathrm{h}}+\hat{j}_\mu^{\mathrm{l}} \tag{10.4}$$

すれば，弱い過程の流れ積型式は，ミューオンの崩壊

$$\mu^-\rightarrow \mathrm{e}^-+\bar{\nu}_\mathrm{e}+\nu_\mu \tag{10.5}$$

のように純粋にレプトンのみを含む過程や，

$$\Lambda^0\rightarrow \mathrm{p}+\pi^- \tag{10.6}$$

のようにレプトンを含まない弱い過程をも含むべきである．弱い相互作用の普遍性という主張は，まず，これらすべての反応が同じ結合の強さ G を持つという事実であった．実際，後述するように，普遍性の概念は今日ではより深い階層で理解されており，レプトンのカレントとクォークの Cabibbo カレントが直接弱いゲージボソンと結合するからである，と考えられている．

すでに見てきたように，Fermi のベクトル・ベクトル結合の理論は，QED のベクトル・カレントとの類推から考えつかれたものである．しかしながら，完全な類推というわけでもない．輻射過程で放出される光子は，電磁力の場における量子であるが，それに対応する $\mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}$ の 1 対を弱い力の量子であると考えるのはむずかしい．たとえば，対の有効質量は過程によってそれぞれ異なるのである．一方，QED のすばらしい成功から，ほかの相互作用の理論も，できるだけ QED との類推に基礎をおくように作ってみる，という考え方が有力になってきた．したがって，弱い相互作用における光子の類推として中間ベクトルボソン（IVB）の存在を仮定し，電磁相互作用が光子の交換で伝達されるように，弱い相互作用は中間ベクトルボソンの交換によって伝達されると想定することは，きわめて自然である．このように考えれば，図 10.1 の点相互作用は，

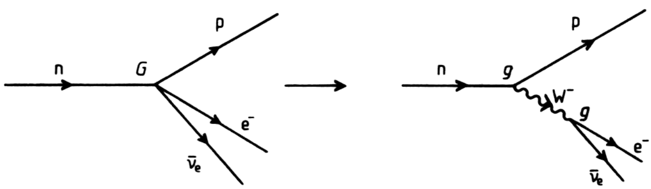


図 10.2　図 10.1 を中間ベクトルボソンの交換で修正した図形

図 10.2 に示すように，中間ベクトルボソンの交換で置き換えられる．

これが最終的に弱い力と電磁力を統一しようとする方向の第一歩である．統一化への途は（これから議論を進めるにしたがってしだいに明確にし，第 5 部で詳しく説明する予定であるが）長くかつ困難な途であった．実際，QED と弱い相互作用のこの視点の間には，一見してあきらかな相違点がある．まずはじめに光子は電気的に中性であるが，ハドロンおよびレプトンの弱い相互作用のカレントは 1 単位の電荷の変化を引き起こす（図 10.2 参照）．したがって中間ベクトルボソンは荷電粒子であり，普通 $W^{\pm}$ と記される†．第 4 章で判明するように $W^{\pm}$ 粒子は最終的にゲージ量子として解釈されるに至る．

第 2 の，そしておそらくさらに著しい違いは，W 粒子は光子とは異なって質量を持たねばならないことである．1960 年代半ば以降，W 粒子を検出する広範な実験が行われてきた．

その頂点は，中性カレントの過程に付随する中性中間ベクトルボソン Z^0 とともに，1983 年 CERN の陽子・反陽子衝突型加速器によって行われた $W^{\pm}$ の発見であった（第 14 章 参照）．それ以前は，W 粒子がみつからないことからその質量の下限を定めることができた．下限を決める明白なひとつの方法は W 粒子を実際に創り出してみることで，W 粒子がまだ現れないエネルギーを調べればよい．しかし陽子・反陽子衝突型加速器が使えるようになるまでは，重心系のエネルギーは比較的低かった．例えば原子核に入射したニュートリノ包含反応

$$\nu_\mu + \mathrm{A} \to \mu^- + \mathrm{W}^+ + \mathrm{X} \tag{10.7}$$

$$\mathrm{W}^+ \to \mu^+ + \nu_\mu \tag{10.8}$$

から，この下限は

$$M_{\mathrm{W}} \gtrsim 3-5\ \mathrm{GeV} \tag{10.9}$$

の程度であった．X は観測しないすべてのハドロンを一括して表す．下限の正確な数値はレプトン過程の分岐比のとり方に依存する．現在 W 粒子はおよそ 80 GeV の質量を持つことが知られている．実際，W 粒子を創るよりはむしろ仮想 W 粒子（交換される粒子）を考えると，式 (10.9) より強い条件が得られる．

---

†（原注）中性カレントの過程もほかに存在する．第 11 章参照．

仮想W粒子は高エネルギー・ニュートリノ全断面積に点相互作用(10.5節参照)からのずれを生ずる．このような実験から下限

$$M_W \geqslant 25-30\ \mathrm{GeV} \tag{10.10}$$

が決まる．

どうしてこのような値が得られるのかを知るためには，Wボソンの伝播関数を調べてみなくてはならない．いつもの係数iを別にすれば，これは

$$\frac{-g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu/M^2}{q^2-M^2} \tag{10.11}$$

である．ここにMはW粒子の質量である．この形がもっともらしいことを説明しよう．それには5.8.1項の光子の伝播関数の解釈を思い起こそう．電磁カレントがあるとき，光子の波動方程式は

$$\Box A^\mu = j^\mu_{\mathrm{em}} \tag{10.12}$$

の形をとると仮定する．係数iを別にすれば，伝播関数はこの方程式の左辺の逆演算子であった．平面波の解に適用すれば

$$-q^2 A^\mu = j^\mu_{\mathrm{em}} \tag{10.13}$$

であるから，伝播関数は

$$-g^{\mu\nu}/q^2 \tag{10.14}$$

である．実際，ここに用いたQEDの取り扱いでは，A_μにLorentzゲージという特定の選択($\partial_\mu A^\mu=0$)を行っている．光子の伝播関数の形は，ゲージのとり方によって変わる．ゲージ不変性の問題は第13章で再び論ずる．ここでは，質量を持つスピン1の粒子の波動方程式の形を導くことに止めよう．一般のゲージでは，Maxwellの方程式は

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu_{\mathrm{em}} \tag{10.15}$$

となる．きわめて自然な置き換え

$$\Box \mapsto \Box + M^2 \tag{10.16}$$

を行えば，

$$(\Box + M^2) W^\mu - \partial^\mu \partial^\nu W_\nu = j^\mu \tag{10.17}$$

を得る．平面波の解に対してこの式は

$$[(-q^2+M^2) g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu] W_\nu = j^\mu \tag{10.18}$$

となり，伝播関数はその逆演算子

$$[(-q^2+M^2)g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu]^{-1} \tag{10.19}$$

に対応する．この逆演算子をどう見いだしたらよいであろうか．Lorentz 不変性が助けになる．利用できるテンソルは $g_{\mu\nu}$ と $q_\mu q_\nu$ しかないから，逆演算子はその線型結合

$$Ag_{\mu\nu}+Bq_\mu q_\nu \tag{10.20}$$

の形でなくてはならない．ふつうの行列算と同じように，逆演算子は

$$\mathbf{MM}^{-1}=\mathbf{1} \tag{10.21}$$

で定義されるから，A，B を条件

$$[(-q^2+M^2)g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu](Ag_{\nu\rho}+Bq_\nu q_\rho)=\delta^\mu_\rho \tag{10.22}$$

から決めることができる．結果は（問題 10.1）

$$\frac{-g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu/M^2}{q^2-M^2} \tag{10.23}$$

となり，これに係数 i を乗じて，質量を持つスピン 1 の粒子の伝播関数と考えるのである．

このようにして中間ベクトルボソン仮説による Fermi の流れ積相互作用の修正が得られる．行列要素は（標準的な規格化因子を含めて）

$$\mathscr{M}=j^{\mathrm{wk}}_\mu\left[\frac{-g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu/M^2}{q^2-M^2}\right]j^{\mathrm{wk}}_\nu \tag{10.24}$$

の形をとる．仮想的な W 粒子の効果からその質量 M_{W} の限界を求めることは，実験データと，式(10.24) から計算した断面積を比較して行われる．式(10.24) は W 粒子の伝播関数を通じて断面積のエネルギー依存性を与えるが，この依存性は式(10.1) から計算される“点”断面積には現れない（10.5 節参照）．

5.8.2 項で，力の及ぶ範囲は交換される粒子の質量に反比例することを学んだ．したがって光子と中間ベクトルボソンの間の質量差は，力の及ぶ領域の違いという主要な定性的差異に翻訳される．QED では光子は質量なしで力の範囲は無限大であるが，下限式(10.10)はすでに弱い力の及ぶ領域が非常に小さいことを意味している．実際，既知の M_{W} の値を用いれば

$$R_{\mathrm{wk}}\sim 1/M_{\mathrm{W}}\sim 2.5\times 10^{-18}\mathrm{m} \tag{10.25}$$

である．

最後に，相互作用の強さについてはどうであろうか．さて Fermi 定数 G_{F} の

大きさを QED の微細構造定数 α と比較しようとすると，難しいことが起こる．α は無次元であるが，G_F はそうでない（式(10.2) 参照）．これはくりこみ可能性（第 12 章）と結びついた決定的な相違点であることがのちに判明する．しかしとにかく先験的に中間ベクトルボソンの理論と QED を比較することは，量子の交換という考えに基づいているのであるから，ごく自然であろう．

式(10.24) は，π^+K^+ 散乱（式(5.72)），π^+e^- 散乱（式(6.51)），$e^-\mu^-$ 散乱（式(6.119)）の取り扱いで前に導かれた 1 光子交換の振幅と比較することができよう．これらの場合は，電磁カレントの行列要素（たとえば式(6.100)，(6.137)）が，それぞれしかるべき Feynman 図形に対応する相互作用の頂点において結合の強さ e を含んでいる．同様に，W 粒子と弱い相互作用のベクトル・カレントの頂点には，特性的な強さ g(図 10.2 を参照)を配すべきであろう．この g は e（我々の次元では）と同じく，無次元であろう．適当な個所で g をさらに正確に定義するつもりであるが，今のところは，次のような定性的な定義で満足しておこう．典型的な β 崩壊のエネルギーに対しては，W 粒子の質量が ~80 GeV の程度であれば間違いなく

$$q^2 \ll M_W^2 \tag{10.26}$$

が成立し，式(10.24)に現れる W 粒子の伝播関数の中の q 依存性は無視することができる．これは定性的に

$$G_F \sim g^2/M_W^2 \tag{10.27}$$

が成立することと同等である．式(10.27)は基本的な関係であって，GSW 理論における正確な表式はのちの 式(10.93) に与えてある．この関係はなぜ Fermi 定数が次元 [質量]$^{-2}$ を持つか，あるいはむしろ弱い相互作用がなぜ弱いのかを説明している．G_F がそんなに“小さい”のは主として M_W がそれほど大きいからである．実際，弱い相互作用と電磁相互作用のみかけ上の大きな相違点から，結局ある簡単な相似点がみつかってすべてを救ってしまうことができる．おそらく g と e の本質的な強さはほぼ同じである．

$$g \sim e \tag{10.28}$$

これから式(10.27) によって M_W のけたを評価すると

$$M_W \sim e/G_F^{1/2} \sim 90\ \text{GeV} \tag{10.29}$$

となり，実際の値にきわめて近い．のちに見るように，GSW 電弱理論は式

(10.27) のような関係を組み入れているのである — 式(10.93) 参照.

これらの諸理論は後述するはずである. さて次に, 弱い相互作用の理論の本質的な内容として, パリティー非保存を論じよう. これはもともとの Fermi 理論にも, 今まで論じてきた中間ベクトルボソンの仮説にも含まれていない内容である.

10.2 弱い相互作用のパリティー非保存

1957 年, Wu たちの実験(Wu *et al*., 1957)は, 弱い相互作用ではパリティーが保存しないという, Lee と Yang (1956)の予言を確認した. 観測されたのは, 崩壊する核の偏極方向に対する β 崩壊の電子の角分布であった. このことは, 偏極ベクトルを $\boldsymbol{S}$, 電子の運動量を $\boldsymbol{p}$ で表せば, 角分布は運動量のスカラー積から成る項のほかに, $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ に依存する項を含むということである. この項がパリティー非保存を表す, ということを理解するためには, まずベクトル（極性ベクトル）と擬ベクトル（軸性ベクトル）の定義を思い出さなくてはならない. ベクトルは, パリティー変換（反転操作）$\mathbf{P}$ に対して座標 $\boldsymbol{r}$ と同じように変換する.

$$\mathbf{P}: \boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r} \tag{10.30}$$

したがってベクトルはパリティー変換のもとで変換性

$$\mathbf{P}: \boldsymbol{a} \to -\boldsymbol{a} \tag{10.31}$$

によって定義される. ベクトルの例は, 運動量 $\boldsymbol{p}$ や電磁カレント $\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}}$ である.

$$\mathbf{P}: \boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p} \tag{10.32}$$

$$\mathbf{P}: \boldsymbol{j}_{\mathrm{em}} \to -\boldsymbol{j}_{\mathrm{em}} \tag{10.33}$$

このようなベクトルのベクトル積はパリティー変換のもとで擬ベクトル

$$\mathbf{P}: \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \to +\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{10.34}$$

を定義する. もっともありふれた例は, 軌道角運動量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{10.35}$$

である. パリティー変換のもとでは, 軌道角運動量およびその拡張として任意の角運動量は, 擬ベクトルとしてふるまう.

$$\mathbf{P}: \boldsymbol{L} \to +\boldsymbol{L} \tag{10.36 a}$$

$$\mathbf{P}: \boldsymbol{S} \to +\boldsymbol{S} \tag{10.36 b}$$

したがってスカラー積を作るときには，スカラー量と擬スカラー量との区別をしなくてはならない

$$\mathbf{P} : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \to + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \quad \text{（スカラー）} \tag{10.37}$$

$$\mathbf{P} : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \to - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \quad \text{（擬スカラー）} \tag{10.38}$$

β 崩壊において観測された電子の角分布が，スカラー量(運動量のスカラー積)と擬スカラー量（$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p}$）をともに含むということは，弱い相互作用においてはパリティーがよい量子数ではない証拠である．(さらに詳しくは Perkins (1987)，第7章を参照せよ)．

Fermi のベクトル・カレントの理論は，このことをとりいれて修正しなくてはならない．長年にわたって労苦多い実験や，多くの失敗に終わった試みを経て，Fermi の流れ積相互作用に関与するカレントは，ベクトル・カレント V_μ と軸性ベクトル・カレント A_μ との混合であることが判明した．次の2つの節で，これを詳しく論じよう．

10.3　ベクトル・カレントと軸性ベクトル・カレント

この節では，ベクトル・カレント $\bar{u}\gamma_\mu u$ と軸性ベクトル・カレント $\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u$ のパリティー操作に対する変換性を解析しよう．正確な議論を展開するためには，Dirac 方程式の Lorentz 共変性を調べなくてはならない（たとえば Bjorken & Drell（1964）または Aitchison（1972）参照)．ここでの出発点は，$\bar{u}\gamma_\mu u$ が Lorentz 変換に対する4元ベクトルであることを既知として，γ_5 を挿入するとこれが擬ベクトルになることを示そう．4行4列の行列 γ_5 は

$$\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{10.39}$$

で定義される．この行列は，ほかの γ 行列と反可換であること（問題10.2）が容易に示される．

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \tag{10.40}$$

第3章の γ 行列のとり方では，γ_5 は次の行列で表される†．

†(原注)1はもちろん2行2列の単位行列である．しかし，今後，1が行列であることは前後関係から推測できるものとして特記しない，という習慣に従うものとする．

$$\gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.41}$$

まず最初に，よく知られた電磁カレントのパリティー変換性を考えよう．第5章と第6章の π^+ の電磁カレント（式(5.59)，(6.47)，(6.100)参照）と同じように，電子の電磁遷移カレントを，電磁カレント演算子の行列要素

$$\langle \mathrm{e}^-\,;\,\boldsymbol{k}',s'\,|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{e}^-\,;\,\boldsymbol{k},s\rangle \tag{10.42}$$

で定義する．パリティー演算でこの行列要素はどう変換するであろうか．電磁カレント演算子は，パリティー操作のもとで座標 x_μ のように，4元ベクトルの変換をする．

$$t\rightarrow +t,\quad \boldsymbol{x}\rightarrow -\boldsymbol{x}$$

すなわち

$$\mathbf{P}:\ \hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\rightarrow \tilde{\hat{j}}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0) \tag{10.43}$$

が成り立つ．ここに $\hat{j}$，$\tilde{\hat{j}}$ は

$$\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)=(\hat{j}^{0}_{\mathrm{em}}(0),\ \hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}(0)) \tag{10.44}$$

$$\tilde{\hat{j}}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)=(+\hat{j}^{0}_{\mathrm{em}}(0),\ \ -\hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}(0)) \tag{10.45}$$

で定義される．状態はパリティー操作で

$$|\,\boldsymbol{k},s\rangle\rightarrow\eta\,|-\boldsymbol{k},s\rangle \tag{10.46}$$

$$|\,\boldsymbol{k}',s'\rangle\rightarrow\eta\,|-\boldsymbol{k}',s'\rangle \tag{10.47}$$

の変換に従う．スピン角運動量は擬ベクトル量だからである．η は（状態の）パリティー量子数で $\eta^2=1$ を満たす．Dirac の γ 行列を用いて，パリティー演算子はどう表されるであろうか．それを調べるために，カレントの行列要素の最低次の表現をスピノールを用いてあからさまに書き上げてみると

$$\langle \mathrm{e}^-\,;\,\boldsymbol{k}',s'\,|\,\hat{j}^{\mu}_{\mathrm{em}}(0)\,|\,\mathrm{e}^-\,;\,\boldsymbol{k},s\rangle=(-e)\mathscr{N}\mathscr{N}'\,\bar{u}(\boldsymbol{k}',s')\gamma^{\mu}u(\boldsymbol{k},s) \tag{10.48}$$

である．ここでスピノール $u(\boldsymbol{k},s)$ は

$$u(\boldsymbol{k},s)=(\omega+m)^{1/2}\begin{pmatrix} \phi^{\mathrm{s}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+m}\,\phi^{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \tag{10.49}$$

で表される．いまの γ 行列のとり方では，スピノール $u(-\boldsymbol{k},s)$ は

$$u(-\boldsymbol{k}, s)=(\omega+m)^{1/2}\begin{pmatrix} \phi^{s} \\ \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+m}\phi^{s} \end{pmatrix} \tag{10.50}$$

となり，関係

$$u(-\boldsymbol{k}, s)=\gamma_0 u(\boldsymbol{k}, s) \tag{10.51}$$

を満たす．行列要素の空間成分を考え，式(10.43) から (10.47) までを用いて，次の恒等式を導くことができる．

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{k}', s' | \hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}(0) | \boldsymbol{k}, s\rangle &= \langle \boldsymbol{k}', s' | \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\, \hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}(0) \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} | \boldsymbol{k}, s\rangle \\ &= -\langle -\boldsymbol{k}', s' | \hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}(0) | -\boldsymbol{k}, s\rangle\end{aligned} \tag{10.52}$$

式 (10.48) に現れるスピノールを用いると，この関係は自明である．γ_0 は $\boldsymbol{\gamma}$ と反交換し

$$\begin{aligned}\bar{u}(\boldsymbol{k}', s')\boldsymbol{\gamma} u(\boldsymbol{k}, s) &= -\bar{u}(-\boldsymbol{k}', s')\boldsymbol{\gamma} u(-\boldsymbol{k}, s) \\ &= -\bar{u}(\boldsymbol{k}', s')\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\gamma_0 u(\boldsymbol{k}, s)\end{aligned} \tag{10.53}$$

が成り立つからである．性質

$$\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\gamma_0=-\boldsymbol{\gamma} \tag{10.54}$$

は，パリティー変換のもとで

$$\hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}(0) \to -\hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{em}}(0) \tag{10.55}$$

が成立するという要求に矛盾しないために，まさに必要な性質である．このことから，パリティー演算子 $\mathbf{P}$ はDirac 波動関数に作用する行列

$$\boxed{\mathbf{P}=\gamma_0} \tag{10.56}$$

で表されることがわかる．この行列はパリティー演算子のすべての要求

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{\dagger}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{2}=\mathbf{1} \tag{10.57}$$

を満たす．このことから，静止している電子と陽電子は反対の(固有)パリティー量子数を持つことがわかる．これまでの行列やスピノールのとり方 (式(3.60)，(3.69) 参照) では，

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{10.58}$$

が成り立つからである．

今やほかの Dirac 演算子に対しても，そのパリティー変換性を調べることが

できる．すでに見たように，

$$V^{\mu}=\bar{u}\gamma^{\mu}u \tag{10.59}$$

は **P** のもとでベクトルの変換を行う．

$$\widetilde{V}^{\mu}=\bar{u}\gamma_0\gamma^{\mu}\gamma_0 u=(V_0,\ -\boldsymbol{V}) \tag{10.60}$$

しかしながら，行列 γ を含むもうひとつの 4 元量を作ることができる．

$$A^{\mu}=\bar{u}\gamma^{\mu}\gamma_5 u \tag{10.61}$$

パリティー操作のもとでこの量は

$$A^{\mu}\to\widetilde{A}^{\mu} \tag{10.62}$$

と変換する．ここに

$$\widetilde{A}^{\mu}=\bar{u}\gamma_0\gamma^{\mu}\gamma_5\gamma_0 u \tag{10.63}$$

である．したがってパリティー操作により，4 元量

$$A^{\mu}\equiv(A_0,\ \boldsymbol{A}) \tag{10.64}$$

は軸性ベクトルと同じように変換する．γ_0 と γ_5 が反可換だから，容易に

$$\widetilde{A}^{\mu}=(-A_0,\ +\boldsymbol{A}) \tag{10.65}$$

が成り立つことが証明されるからである．まったく同様に，スピノールと γ 行列の組み合わせとして，

$$\text{スカラー}\qquad S=\bar{u}\mathbf{1}u \tag{10.66}$$

$$\text{擬スカラー}\qquad P=\bar{u}\gamma_5 u \tag{10.67}$$

を導入することができる．

10.4　左回りのニュートリノ

一連の有名な実験によって，ニュートリノは次のような性質を持つことが知られている．

(a)　質量を持たない（あるいは質量がきわめて小さい）．

(b)　3 種の異なった種類のニュートリノがあり，それぞれ固有の荷電レプトンと組になっている．

$$(\mathrm{e}^-,\ \nu_{\mathrm{e}}) \tag{10.68}$$

$$(\mu^-,\ \nu_{\mu}) \tag{10.69}$$

および

$$(\tau^-,\ \nu_{\tau}) \tag{10.70}$$

(c)　スピン 1/2 を持つ．ただし，弱い相互作用には負のヘリシティーの状態のみが関与する．

ヘリシティーとは，運動の方向に射影したスピンの値である．

$$\lambda = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \tag{10.71}$$

スピン 1/2 の粒子にはヘリシティー$\lambda = \pm 1/2$ の状態がある．すなわちスピンが運動の方向に平行な状態と反平行な状態である．偏光との類推から，正ヘリシティーの状態を“右回り（右旋性)”，負ヘリシティーの状態を“左回り（左旋性)”という．弱い相互作用に関与する粒子のヘリシティー相関を測定する独創的な諸実験によって，弱いカレントは本質的にベクトルおよび軸性ベクトルであり，左回りのニュートリノだけが弱い相互作用に効く（図 10.3）ことが確認された．(実験の解説は Perkins (1987) の教科書にある．）ただひとつのヘリシティー状態のみが関与する事実は，弱い相互作用がパリティーを保存しないことをただちに示す．ヘリシティーは擬スカラー量であって，パリティー操作のもとで

$$\mathbf{P} : \lambda \to -\lambda \tag{10.72}$$

となる．したがって，QED のようなパリティー不変な理論は，相互作用の中で 2 つのヘリシティー状態が同等に関与するものでなくてはならない．

この節で行おうとすることは，ニュートリノに関するこれらの知見を，弱いレプトン・カレントの形に組み込むことである．これはよく知られた $(1-\gamma_5)$因子の導入で行われる．そしてこれから，$(V-A)$理論という基本仮定が導かれるようになったのである．この因子でうまくいく，ということを示すにはいろいろなやり方がある．スピン射影演算子全体の技術体系を作り上げることは回避して，もっとも簡単に，かつもっともわかりやすくこの因子を考察するには，直接 Dirac 方程式

$$E\omega = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m)\omega \tag{10.73}$$

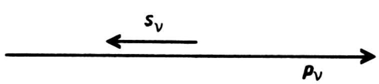


図 10.3　左回りのヘリシティー状態

にたちかえり，$\boldsymbol{\alpha}$ および β 行列の異なる表示をとって調べてみればよい．行列は反交換関係が指定されているのみだから，これはいつでも可能である．しかしながら，Dirac スピノールのあからさまな形は，あきらかに γ 行列の表示による．この節では，第 3 章で導入した行列やスピノールのあからさまな形は忘れて，γ_5 が対角的になるような表示をとることにしよう．γ 行列は

$$\gamma_5=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{10.74}$$

のように選ぶ．これは第 3 章の行列とユニタリー変換で結びつけられている．この新しい表示におけるスピノールの形を決定しなくてはならないが，前と同じく

$$\omega=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{10.75}$$

と定義する．$\boldsymbol{\alpha}$，β の新しい表示を用いると，Dirac 方程式は次の 2 つの方程式に分割される．

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\phi=\frac{E}{|\boldsymbol{p}|}\phi-\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\chi \tag{10.76 a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\chi=\frac{-E}{|\boldsymbol{p}|}\chi+\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\phi \tag{10.76 b}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{p}}$ は

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \tag{10.77}$$

で定義した．$m=0$，$E=|\boldsymbol{p}|$ の極限では ϕ と χ は完全に分離し，それぞれヘリシティーの固有状態になる．

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\phi=+\phi \qquad \text{正ヘリシティー} \tag{10.78 a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\chi=-\chi \qquad \text{負ヘリシティー} \tag{10.78 b}$$

したがって，Dirac スピノールの左回り成分をとり出すためには，

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(1-\gamma_5) \tag{10.79}$$

の形の行列によって，下の成分 χ を ω から選び出さなくてはならない．質量を持たないニュートリノに対して結合

$$(1-\gamma_5)u_\nu(\boldsymbol{p}) \tag{10.80}$$

は[†]，左回りの成分のみを含む．この結果は，γ 行列の特定の具合よい選び方を用いて導き出したにもかかわらず，結果そのものは γ 行列の選び方によらない．

それでは，弱い相互作用に関与する反ニュートリノのヘリシティーはどうなるであろうか．弱い相互作用はパリティー **P** を保存しないばかりでなく，荷電共役（粒子・反粒子）変換 **C** の不変性をも満たさない．この変換は，すべての粒子をその反粒子で置き換える変換である．しかしながら，弱い相互作用はきわめてよい近似で，複合操作 **CP** のもとで不変である．(唯一の例外は，中性 K 中間子の崩壊で観測されるごくわずかの破れである．) したがって弱い相互作用に効く反ニュートリノ成分は，右回りあるいは正のヘリシティー状態である．操作 **C** によってニュートリノは反ニュートリノにかわり，操作 **P** によって λ は $-\lambda$ にかわるからである．右回りの反ニュートリノのスピノール成分は，左回りの負エネルギー状態のニュートリノのスピノール成分に対応するから，右回りの反ニュートリノに対する射影演算子もまた $(1-\gamma_5)/2$ であることがわかる．反ニュートリノのスピノールは，いつも

$$(1-\gamma_5)v_\nu(\boldsymbol{p}) \tag{10.81}$$

という結合で現れるはずである．

さて，ベクトル・カレントおよび軸性ベクトル・カレントについて，そのヘリシティーの性質を導くことができる．質量を持たないフェルミオンに対しては

$$u=\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)u+\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)u \tag{10.82}$$

$$\equiv u_{\mathrm{R}}+u_{\mathrm{L}} \tag{10.83}$$

と書くことができる．2 つの因子

$$P_{\mathrm{R}}=\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right),\qquad P_{\mathrm{L}}=\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \tag{10.84}$$

[†] (原注) 質量を持たないスピン 1/2 粒子に対しても，質量を持つ場合と同じ規格化を用いる．すなわち $u^\dagger u=2E$ であって，このように規格化されたスピノールを（ω とは呼ばずに）u と呼ぶことにする．

はヘリシティー射影演算子で，$(\gamma_5)^2=1$ の性質から容易に証明されるように

$$P_R^2=P_R, \qquad P_L^2=P_L, \\ P_RP_L=P_LP_R=0, \qquad P_L+P_R=1 \tag{10.85}$$

の性質を満たす．したがって，相互作用 $\bar{u}\gamma_\mu u$ は

$$(u_R^\dagger+u_L^\dagger)(\gamma_0\gamma_\mu)(u_R+u_L) \tag{10.86}$$

のように書くことができるが演算子 $(1\pm\gamma_5)$ は積 $\gamma_0\gamma_\mu$ と交換するから，この式はまた

$$u_R^\dagger(\gamma_0\gamma_\mu)u_R+u_L^\dagger(\gamma_0\gamma_\mu)u_L \tag{10.87}$$

とも表される．すなわち，ベクトル相互作用は，質量を持たない粒子のヘリシティーを保存する．さらに，$\gamma_0\gamma_\mu$ の積に γ_5 を挿入しても上の議論は変わらない．したがって同じ結論が軸性ベクトル・カレント $\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u$ についても成立する．一方，スカラー相互作用と擬スカラー相互作用は，質量を持たないスピン 1/2 の粒子のヘリシティーを必然的に変える．したがって相互作用のいろいろな異なった形を区別するのは，ヘリシティー相関である．

10.5 $V-A$ 理論

今までのすべての実験の結果は，初期の中間ベクトルボソン模型および Fermi の流れ積相互作用を，わずかに，しかしきわめて精妙に修正してとりいれることができる．純ベクトル・カレントにかわって，今やベクトル V と軸性ベクトル A の部分からなるカレントがある．したがって，レプトンの弱いカレント

$$\hat{j}_\mu^{\text{lept}}=\hat{j}_\mu^{\text{wk}}(\text{e})+\hat{j}_\mu^{\text{wk}}(\mu)+\hat{j}_\mu^{\text{wk}}(\tau)+\cdots \tag{10.88}$$

は，それぞれのレプトンおよびそれに対応するニュートリノ（質量は 0 と仮定する）に対して，

$$\langle \text{e}^-|\,\hat{j}_\mu^{\text{wk}}\,|\nu_e\rangle=(g/\sqrt{2})\mathcal{N}\mathcal{N}'\,\bar{u}(\text{e})\gamma_\mu\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u(\nu_e) \tag{10.89}$$

の形をとる．この式には運動量とスピンの指定はあからさまに書き入れず，各スピノールは粒子の名前だけで区別しておいた．この式は W 粒子との結合定数 g を定義する．因子 $\sqrt{2}$ を導入し，簡単な因子 $(1-\gamma_5)$ のかわりにあえて射影演算子 P_L を用いた理由は，第 14 章で解説する“標準モデル”の形と一致するよ

うに，あらかじめ記法を統一しておきたいからである．

これで弱い相互作用の断面積を計算することができる．散乱過程（図 10.4 参照）

$$\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e \tag{10.90}$$

を考えよう．図形が示すように，W 粒子の伝播関数の中の q^2 依存性が無視できるような低エネルギー領域では，行列要素（式(10.24) 参照）

$$\frac{g^2}{2}\bar{u}(\mu)\gamma_\mu\frac{(1-\gamma_5)}{2}u(\nu_\mu)\frac{(-g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu/M_W^2)}{q^2-M_W^2}\bar{u}(\nu_e)\gamma_\nu\frac{(1-\gamma_5)}{2}u(e) \tag{10.91}$$

を（“Fermi” 型の）点相互作用の行列要素

$$(G_F/\sqrt{2})\,\bar{u}(\mu)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\nu_\mu)g^{\mu\nu}\bar{u}(\nu_e)\gamma_\nu(1-\gamma_5)u(e) \tag{10.92}$$

で置き換えてさしつかえない．Fermi 定数 G_F はまさしくこの式で定義される．$q^2 \ll M_W^2$ の条件のもとで式(10.91) と式(10.92) を比較すれば，Fermi 理論と中間ベクトルボソン模型とのパラメーター間の関係

$$\boxed{G_F/\sqrt{2}=g^2/8M_W^2} \tag{10.93}$$

が得られる．“点” 振幅 (10.92) を用いて散乱断面積を計算しよう．

2 体散乱の一般式 (5.122) を再録すると，すべての静止質量を無視する近似で

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{16\pi s^2}|\overline{F}|^2 \tag{10.94}$$

である．$|\overline{F}|^2$ はスピンについて平均したしかるべき行列要素の 2 乗を表す．ニュートリノ・電子散乱では，偏りのない電子に対しては初めの電子のスピン状態について平均し，終わりのミューオンのスピン状態について足さなくてはならない．ニュートリノについては，初めのニュートリノのヘリシティーにつ

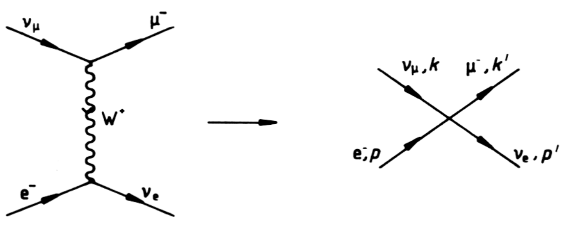


図 10.4　$\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ の中間ベクトルボソン交換図形と，その点状近似

いて平均する必要はない．左回りのニュートリノだけが弱い相互作用に効くからである．同様に，終わりの状態のニュートリノについても，ヘリシティーの和はとらない．しかし，計算の便宜上は，実際にどちらのニュートリノについても 2 つのヘリシティー状態について和をとる．因子 $(1-\gamma_5)$ が自動的に右回りのニュートリノの効果を 0 にしてしまい，断面積に寄与しないからである．

eμ 散乱の例題と同じく，$|\overline{F}|^2$ は次の対角和の積である．

$$|\overline{F}|^2=\left(\frac{G_F^2}{2}\right)\mathrm{Tr}[\not{k}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma_\nu(1-\gamma_5)]\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}\gamma^\nu(1-\gamma_5)] \quad (10.95)$$

レプトンの質量の効果はすべて無視したことに注意してほしい．高エネルギー領域では質量項は小さな補正にしか過ぎないからである．

$$|\overline{F}|^2=\left(\frac{G_F^2}{2}\right)N_{\mu\nu}E^{\mu\nu} \quad (10.96)$$

と定義すると，$\nu_\mu\to\mu^-$ 転化のテンソル $N_{\mu\nu}$ は

$$N_{\mu\nu}=\mathrm{Tr}[\not{k}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma_\nu(1-\gamma_5)] \quad (10.97)$$

で与えられる．この中に $1/(2s+1)$ 因子は含まない．一方 $e^-\to\nu_e$ 転化のテンソル $E^{\mu\nu}$ は

$$E^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}\gamma^\nu(1-\gamma_5)] \quad (10.98)$$

であって，電子のスピン平均の因子 $1/(2s+1)=1/2$ を含む．この計算は，2，3 新しい特徴を含むから，少し詳しく考察してみよう．$(1-\gamma_5)$ 因子を 2 つの γ 行列の積 $(\not{p}\gamma^\nu)$ と交換し，

$$(1-\gamma_5)^2=2(1-\gamma_5) \quad (10.99)$$

の関係を用いると $N_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}N_{\mu\nu}&=2\mathrm{Tr}[\not{k}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma_\nu]\\&=2\mathrm{Tr}(\not{k}'\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu)-2\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{k}\gamma_\nu\not{k}'\gamma_\mu)\end{aligned} \quad (10.100)$$

の形で書ける．初めの対角和は eμ 散乱の以前の計算と同じ（式(6.88) 参照）で

$$\mathrm{Tr}(\not{k}'\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu)=4[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+(q^2/2)g_{\mu\nu}] \quad (10.101)$$

となる．第 2 の対角和は公式（付録D参照）

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \quad (10.102)$$

を適用すれば求められる．全反対称テンソル $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は，テンソル ε_{ijk} の 4 次元的拡張で

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{cases} +1 & \varepsilon_{0123}\text{ および }\alpha\beta\gamma\delta\text{ が }0,\ 1,\ 2,\ 3\text{ の偶順列のとき} \\ -1 & \varepsilon_{1023}\text{ および }\alpha\beta\gamma\delta\text{ が }0,\ 1,\ 2,\ 3\text{ の奇順列のとき} \\ 0 & 2\text{ つ以上の指標が等しいとき} \end{cases} \tag{10.103}$$

で定義される．定義により

$$\varepsilon_{0123}=+1 \tag{10.104a}$$

であるが，一方

$$\varepsilon^{0123}=-1 \tag{10.104b}$$

であることに注意せよ．また2個の ε テンソルを縮約した結果が必要である．3次元の ε テンソルについては，可能な組み合わせをつくして，容易に

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} \tag{10.105}$$

という結果が得られる．あるいは

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{kl}\delta_{jm} \tag{10.106}$$

と書いても同じである．4次元の ε テンソルの縮約はその拡張であって

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}=-2!\begin{vmatrix} \delta_\alpha^\gamma & \delta_\beta^\gamma \\ \delta_\alpha^\delta & \delta_\beta^\delta \end{vmatrix} \tag{10.107}$$

になることが示される(問題10.3)．ここで負号は式(10.104)に由来し，因子2!は添字が2つ縮約されたことからきている．

さて $\nu_\mu\to\mu^-$ 転化のテンソル $N_{\mu\nu}$ は，指標を並べなおして

$$\boxed{N_{\mu\nu}=8[(k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+(q^2/2)g_{\mu\nu})-\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k^\alpha k'^\beta]} \tag{10.108}$$

である．$e^-\to\nu_e$ 転化のテンソル $E^{\mu\nu}$ も同様に求められるが，因子2で割って

$$E^{\mu\nu}=4[(p'^\mu p^\nu+p'^\nu p^\mu+(q^2/2)g^{\mu\nu})-\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}p_\gamma p'_\delta] \tag{10.109}$$

である．さて，電磁テンソル (6.130) と同じく，すべてのレプトン質量を無視した近似では

$$q^\mu N_{\mu\nu}=q^\nu N_{\mu\nu}=0 \tag{10.110}$$

が成り立つ．したがって

$$p'=p+q \tag{10.111}$$

と置き換え，$N_{\mu\nu}$ と縮約するときは q を含む項を落としてよい．また，反対称

の項は

$$\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}p_\gamma(p_\delta+q_\delta)=\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}p_\gamma q_\delta \tag{10.112}$$

となる．$\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$ は γ，δ について反対称なのに，$p_\gamma p_\delta$ は対称だからである．このようにして最終的に

$$\boxed{E_{\text{eff}}^{\mu\nu}=8p^\mu p^\nu+2q^2g^{\mu\nu}-4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}p_\gamma q_\delta} \tag{10.113}$$

が得られる．さてこれから 2 つのテンソルの縮約を行わなくてはならない．すべての質量を省略しているから，“実験室”系へ移す前に，不変式の形で計算するほうが容易である．質量をすべて無視するとき Mandelstam 変数は

$$s=2k\cdot p \tag{10.114 a}$$

$$u=-2k'\cdot p \tag{10.114 b}$$

$$t=-2k\cdot k'=q^2 \tag{10.114 c}$$

となり，条件

$$s+t+u=0 \tag{10.115}$$

を満たす．縮約

$$N_{\mu\nu}E^{\mu\nu}=N_{\mu\nu}E_{\text{eff}}^{\mu\nu} \tag{10.116}$$

を式(10.107) を用いて遂行すると，$\nu\mathrm{e}\to\nu\mu$ 散乱の行列要素の 2 乗は（問題 10.3）

$$\boxed{N_{\mu\nu}E^{\mu\nu}=16(s^2+u^2)+16(s^2-u^2)} \tag{10.117}$$

となる．第 1 項は $N_{\mu\nu}$，$E^{\mu\nu}$ の対称部分，第 2 項は $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ を含む反対称部分から出てきたものである．また質量を無視する近似で成り立つ

$$t=q^2=-(s+u) \tag{10.118}$$

も用いた．したがって，散乱過程

$$\nu_\mu\mathrm{e}^-\to\mu^-\nu_\mathrm{e} \tag{10.119}$$

に対しては

$$N_{\mu\nu}E^{\mu\nu}=+32s^2 \tag{10.120}$$

となり，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{16\pi s^2}\left(\frac{G_\mathrm{F}^2}{2}\right)N_{\mu\nu}E^{\mu\nu} \tag{10.121}$$

より最終結果

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt}=\frac{G_F^2}{\pi}} \tag{10.122}$$

を得る．

ほかのあらゆる純レプトン過程についても，似たような方法で計算できる．(ほかの例については Bailin (1982) 参照．)

p を重心系の 3 元運動量の大きさ，θ を重心系の散乱角とするとき，$t=-2p^2\times(1-\cos\theta)$ であるから，全散乱断面積は

$$\sigma=(4G_F^2/\pi)p^2 \tag{10.123}$$

で与えられる．電子の深非弾性散乱の場合と同じように，次の章で“実験室”系におけるニュートリノの散乱断面積のふるまいをとりあげよう．簡単な計算から $p^2\sim(1/2)m_eE$ である．ただしレプトン質量の 2 乗はすべて m_eE にくらべて省略してある．E は静止している電子に入射するニュートリノ実験室系におけるエネルギーである．これから，点近似の散乱に対しては“実験室”系の全断面積は E に比例して増加する，という結論を得る（問題 10.5 参照）．

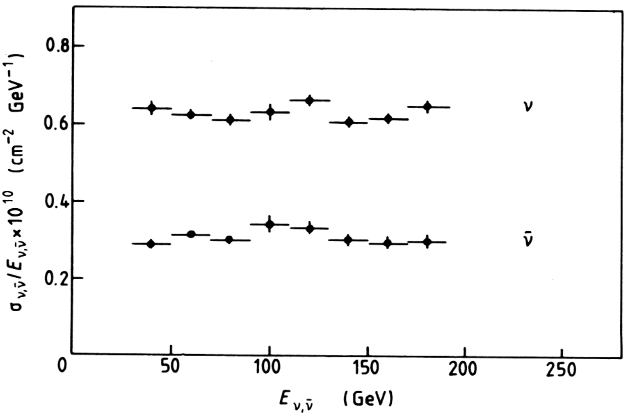


図 10.5　ニュートリノのエネルギーの関数として描いたニュートリノおよび反ニュートリノの全断面積（de Groot *et al*., 1979)

反応(10.119) は測定が難しい．次の章で論ずる予定であるが，ν が核子で散乱されるとき，ν とクォークの間の点相互作用を用いて，もっと測定しやすい関係式が得られる．したがって式(10.123) は

$$\sigma=\frac{4G_F^2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}ME, \qquad \sigma/E\simeq 0.3\times 10^{-38}\,\mathrm{cm^2\,GeV^{-1}} \tag{10.124}$$

で置き換えられる（問題 11.2 参照，付録の式(B.17) 参照)．ここでMは核子の質量，E は実験室系における入射ニュートリノのエネルギーである．図 10.5 は，ある範囲の ν，$\bar{\nu}$ のエネルギーに対し，σ/E 対 E を図示した曲線である．(実際の大きさの理由は 11.2 節であきらかになる.）W 粒子の質量の限界を与えたのは，この点状のふるまいからほとんどずれないという事実からであった．

次の章ではハドロンの弱いカレントの問題点と，ニュートリノの深非弾性散乱とをとりあげる．

まとめ

(1) Fermi の流れ積相互作用．ハドロンの弱いカレントとレプトンの弱いカレント．
(2) 中間ベクトルボソン模型．質量を持つスピン 1 の粒子の伝播関数．
(3) パリティー非保存．
(4) ベクトル・カレントおよび軸性ベクトル・カレント．
(5) 左回りのニュートリノ．
(6) $V-A$ 理論．
(7) 点近似による $\nu_\mu e^- \to \mu^-\nu_e$ 散乱の断面積の計算．

問題

10.1 Lorentz 不変性から 逆演算子

$$[(-q^2+M^2)g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu]^{-1}$$

は一般の形

$$Ag_{\mu\nu}+Bq_\mu q_\nu$$

を持つはずである．逆演算子の定義から，A，B は式

$$[(-q^2+M^2)g^{\mu\rho}+q^\mu q^\rho][Ag_{\rho\nu}+Bq_\rho q_\nu]=\delta^\mu_\nu$$

を満たすように決められなくてはならない．これから

$$A=-\frac{1}{q^2-M^2} \qquad \text{および} \qquad B=+\frac{1}{M^2}\frac{1}{q^2-M^2}$$

となることを示せ．$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}$ に注意．

10.2　行列 γ_5 を $\gamma_5\equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ で定義する．次の性質を証明せよ．

（i）　$\gamma_5^2=1$ および $(1+\gamma_5)(1-\gamma_5)=0$

（ii）　γ 行列の反交換関係から

$$\{\gamma_5,\ \gamma_\mu\}=0$$

を示せ．これから

$$(1+\gamma_5)\gamma_0=\gamma_0(1-\gamma_5)$$
$$(1+\gamma_5)\gamma_0\gamma_\mu=\gamma_0\gamma_\mu(1+\gamma_5)$$

を示せ．

10.3　(a)　次式

$$\varepsilon_{12}=+1, \qquad \varepsilon_{21}=-1, \qquad \varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$$

で定義される 2 次元の反対称テンソルを考える．(必要があれば) すべての可能な組み合わせをあからさまに書き上げて，

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}=+1(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})$$

の結果を導け．これから

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{il}=\delta_{jl} \quad \text{および} \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=2$$

を証明せよ．2 次元では $\sum_i \delta_{ii}=2$ であることに注意．

(b)　前項 (a) の場合とまったく同じ考え方で，3 次元の反対称テンソル ε_{ijk} の積は

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

と書くことができる．これから次の結果を証明せよ．

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=2\delta_{kn}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=3!$$

(c) これらの結果を 4 次元 Lorentz テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ に拡張せよ．ただし (Lorentz 空間は擬 Euclid 的だから) $\varepsilon_{0123}=+1$ に対して $\varepsilon^{0123}=-1$ になることに注意せよ．

10.4 パイオンの崩壊 $\pi^+\to e^+\nu$ の不変振幅は次のように書けることを示せ．

$$F=(G_F/\sqrt{2})f_\pi p^\mu \bar{u}(\nu)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v(e)$$

ただし p^μ はパイオンの 4 元運動量である．崩壊率を与える公式

$$\Gamma=(1/2M_\pi)|\overline{F}|^2\mathrm{dLips}(M_\pi^2\,;\,k_e,\ k_\nu)$$

を用いて，パイオンの静止系で崩壊率を計算せよ．崩壊 $\pi^+\to e^+\nu$, $\pi^+\to\mu^+\nu$ の崩壊率の比は

$$\frac{\Gamma(\pi^+\to e^+\nu)}{\Gamma(\pi^+\to\mu^+\nu)}=\left(\frac{M_e}{M_\mu}\right)^2\left(\frac{M_\pi^2-M_e^2}{M_\pi^2-M_\mu^2}\right)^2$$

で与えられることを示せ．この式の中で，どの因子が $|\overline{F}|^2$ の結果にもっとも強く依存するか．

10.5 弱い相互作用の流れ積相互作用理論で与えられる散乱過程

$$\nu_\mu+e^-\to\mu^-+\nu_e$$

の振幅

$$F=(G_F/\sqrt{2})\bar{u}(\mu)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\nu_\mu)g^{\mu\nu}\bar{u}(\nu_e)\gamma_\nu(1-\gamma_5)u(e)$$

から出発し，10.5 節の計算の中間結果をすべて導け．すべてのレプトンの質量を無視するとき微分断面積は

$$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t=G_F^2/\pi$$

で与えられることを示し，これから全断面積は s に比例して増加すること

$$\sigma=G_F^2 s/\pi$$

を導け．

第11章　ハドロンの弱いカレントと中性カレント

11.1　普遍性と Cabibbo の理論

前章の弱い相互作用の議論では，中性子の β 崩壊（図 11.1）のようなストレンジネスが保存する弱い相互作用のみを取り扱った．これらの過程のほかに，Λ 粒子の β 崩壊（図 11.2）のようにストレンジネスが変化する弱い相互作用がある．（チャーム量子数は 11.4 節まで伏せておく．）この過程では，レプトンのカレントもハドロンのカレントも電荷を変えるが，さらにニュートリノのカレント $\Lambda \rightarrow \mathrm{p}$ はストレンジネスをも変えるのである．

普遍性の概念は，純粋にレプトンのみが関与するミューオンの β 崩壊（図 11.3）の結合定数が中性子の β 崩壊の結合定数に等しい，という観測に端を発し

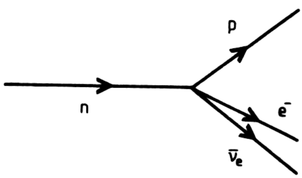


図 11.1　中性子のベータ崩壊，4 フェルミオン相互作用

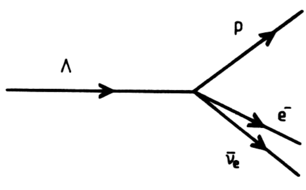


図 11.2　Λ 粒子のベータ崩壊，4 フェルミオン相互作用

ている．実は，詳しく実験データを比較してみると，これは正確には正しくない．ストレンジネスを保存するハドロンの弱い崩壊は，純レプトンの崩壊よりわずかに弱い．そのうえ，ストレンジネスを変えるハドロンの弱いカレントはさらに弱いのである．Cabibbo の理論 (Cabibbo, 1963) は，ハドロンの弱い相互作用の強さは，$\Delta S=0$ の遷移と $\Delta S=1$ の遷移の間で共通であると仮定する．クォークを用いてその主張を述べると，許容遷移の振幅は比

$$\mathrm{e} \to \nu : g \tag{11.1 a}$$

$$\mathrm{d} \to \mathrm{u} : g\cos\theta_\mathrm{C} \tag{11.1 b}$$

$$\mathrm{s} \to \mathrm{u} : g\sin\theta_\mathrm{C} \tag{11.1 c}$$

でもって現れるということである．ここに θ_C を Cabibbo 角という．実験データにもっともよくあうように決めた θ_C は

$$\sin\theta_\mathrm{C} \simeq 0.23 \tag{11.2}$$

である．実験はまた，これらすべての電荷を変える弱いカレントの時空構造は $V-A$ の性格を持つことを示す．したがって，弱いカレントの信ずべき表式は，

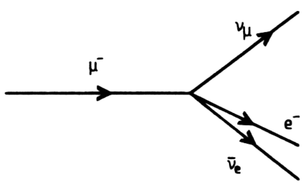


図 11.3　μ^- 粒子のベータ崩壊，4 フェルミオン相互作用

表 11.1　$\triangle Q=1$ の弱いカレント

$\langle \nu_\mathrm{e} \lvert \hat{j}^{\mathrm{wk}}_\mu \rvert \mathrm{e}^- \rangle = \dfrac{g}{2^{1/2}} \bar{u}(\nu)\gamma_\mu \dfrac{(1-\gamma_5)}{2} u(\mathrm{e})$
$\langle u \lvert \hat{j}^{\mathrm{wk}}_\mu \rvert \mathrm{d} \rangle = \dfrac{g}{2^{1/2}} \cos\theta_\mathrm{C} \bar{u}(\mathrm{u})\gamma_\mu \dfrac{(1-\gamma_5)}{2} u(\mathrm{d})$
$\langle u \lvert \hat{j}^{\mathrm{wk}}_\mu \rvert \mathrm{s} \rangle = \dfrac{g}{2^{1/2}} \sin\theta_\mathrm{C} \bar{u}(\mathrm{u})\gamma_\mu \dfrac{(1-\gamma_5)}{2} u(\mathrm{s})$

表11.1にまとめてある形である．（標準的なスピノール規格因子は省いてある.）

低エネルギー領域の弱い相互作用の諸過程では，クォークの弱いカレントの簡単な構造は，摂動論の応用できない強い相互作用の効果でしゃへいされてしまって，形状因子および単純な $V-A$ 型式からのずれとして現れる．たとえば，電子の電磁カレント(10.48)と，2つの形状因子・ひとつの異常磁気能率相互作用を持つ陽子の電磁カレント(6.149)とを比較してみよ．しかし，深非弾性電子・陽子散乱がクォークの電磁カレントに直接迫ることができたように，深非弾性ニュートリノ散乱は直接クォークの弱いカレントを検出することができる．したがって次の節では，深非弾性ニュートリノ散乱とクォーク・パートン模型を論ずることにしよう．しかしその前に，Cabibboのクォーク・カレントを行列の形に書いて，その性質をまとめておこう．行列の構造の深遠な意味は，第14章でGlashow-Salam-Weinberg (GSW)理論を論ずるときに明らかになるであろう．

クォークの弱いカレントの遷移振幅は

$$j_\mu^{\mathrm{wk,q}} \sim g_{\alpha\beta}\bar{q}_\alpha\gamma_\mu\frac{1}{2}(1-\gamma_5)q_\beta \tag{11.3}$$

の形を持っている．ここに α，β はクォークの“フレイバー”（香り，しばらくはu，d，sの区別と考えておいてよい）の指標，$g_{\alpha\beta}$ は荷電カレントのCabibbo構造を表すパラメーター

$$g_{\alpha\alpha}=0 \tag{11.4 a}$$

$$g_{\mathrm{ud}}=(g/\sqrt{2})\cos\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.4 b}$$

$$g_{\mathrm{us}}=(g/\sqrt{2})\sin\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.4 c}$$

である．このカレントのフレイバーにのみ着目して，2成分のクォーク・スピノール

$$q=\begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_{\mathrm{C}}+s\sin\theta_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

を導入すると，振幅のCabibbo構造は行列の形で簡潔に表すことができる．

$$j_{\mathrm{wk}}^{+}=(g/\sqrt{2})(\bar{u},\ \ \bar{d}\cos\theta_{\mathrm{C}}+\bar{s}\sin\theta_{\mathrm{C}})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ d\cos\theta_{\mathrm{C}}+s\sin\theta_{\mathrm{C}}\end{pmatrix} \tag{11.6}$$

$$=(g/\sqrt{2})\bar{u}d\cos\theta_{\mathrm{C}}+(g/\sqrt{2})\bar{u}\ s\sin\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.7}$$

ここに j_{wk}^{+} は電荷を 1 単位上げる弱いカレントの振幅を表す．電荷を上げる行列は，Pauli 行列 τ_{+} と本質的に変わらないことに注意せよ．

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{\tau_1+\mathrm{i}\tau_2}{2}=\frac{\tau_{+}}{2} \tag{11.8}$$

実際，クォークは“弱いアイソスピン”の 2 重子（2 重項）

$$\begin{pmatrix}u\\ d_{\mathrm{C}}\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}Q=+\dfrac{2}{3}\\[2ex] Q=-\dfrac{1}{3}\end{matrix} \tag{11.9}$$

をなす，と考えられる．ここに d_{C} は d クォークに“Cabibbo 回転”を行ったもので

$$d_{\mathrm{C}}=d\cos\theta_{\mathrm{C}}+s\sin\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.10}$$

で定義される．j_{wk}^{+} は（電荷を上げると言うかわりに）“弱いアイソスピンを上げる”遷移振幅という．（弱いアイソスピンの詳しい議論については第 14 章を参照せよ．）すべてのクォーク·カレントの左回りの成分だけが弱い相互作用に効く，という事実を明示するために，時にはクォーク記号に添字“L”を付すことがある．

$$q_{\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}u\\ d_{\mathrm{C}}\end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \tag{11.11}$$

$$j_{\mathrm{wk}}^{+}\sim\bar{q}_{\mathrm{L}}\tau_{+}q_{\mathrm{L}} \tag{11.12}$$

11.2　深非弾性ニュートリノ散乱

中間ベクトルボソンによる実効 4 フェルミオン相互作用のモデルを用い，W 粒子 1 個の交換を仮定して，包含ニュートリノ散乱を定式化することは容易である（図 11.4）．相互作用の局所性からのずれはいまだに観測されていないから，$q^2\ll M_{\mathrm{W}}^2$ であれば成立する点近似

$$G_{\mathrm{F}}/\sqrt{2}=g^2/8M_{\mathrm{W}}^2 \tag{10.93}$$

を使って断面積を算出しよう．断面積は一般の形

$$d\sigma^{(\nu)} \sim G_F^2 N_{\mu\nu} W^{\mu\nu}_{(\nu)}(q,\ p) \tag{11.13}$$

で表される．ここに $N_{\mu\nu}$ は前章に現れたカレント・テンソル

$$N_{\mu\nu}=8\{[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+(q^2/2)g_{\mu\nu}]-i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k^\alpha k'^\beta\} \tag{10.108}$$

である．弱いハドロン・テンソル $W^{\mu\nu}_{(\nu)}$ の形は Lorentz 不変性から導き出すことができる．レプトンの質量を無視する近似では

$$q^\mu N_{\mu\nu}=q^\nu N_{\mu\nu}=0 \tag{10.110}$$

が成り立つから，$W^{\mu\nu}_{(\nu)}$ の中に 4 元ベクトル q の 1 次形は現れない．$N_{\mu\nu}$ が擬テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ を含むように，$W^{\mu\nu}_{(\nu)}$ も同じテンソルを含むのはパリティーが保存しないからである．電子散乱に対するハドロンのテンソル(4.8)とまったく平行に，ニュートリノ散乱に対する構造関数を

$$\boxed{W^{\mu\nu}_{(\nu)}=(-g^{\mu\nu})W_1^{(\nu)}+\frac{1}{M^2}p^\mu p^\nu W_2^{(\nu)}-\frac{i}{2M^2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}p_\gamma q_\delta W_3^{(\nu)}} \tag{11.14}$$

で定義する．一般に構造関数は 2 つの変数，たとえば Q^2 と ν に依存するが，Bjorken の極限では電子散乱と同じように，近似的なスケーリング則が観測されている（式(7.19) 参照）．

$$\left.\begin{array}{l} Q^2\to\infty \\ \nu\ \to\infty \end{array}\right\}\quad x=Q^2/2M\nu\ \text{固定} \tag{11.15 a}$$

$$\nu W_2^{(\nu)}(Q^2,\ \nu)\to F_2^{(\nu)}(x) \tag{11.15 b}$$

$$MW_1^{(\nu)}(Q^2,\ \nu)\to F_1^{(\nu)}(x) \tag{11.15 c}$$

$$\nu W_3^{(\nu)}(Q^2,\ \nu)\to F_3^{(\nu)}(x) \tag{11.15 d}$$

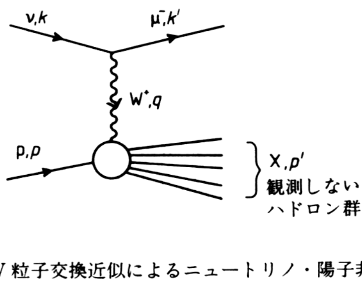


図 11.4　1 W 粒子交換近似によるニュートリノ・陽子非弾性散乱

式(7.19)と同じく，F が有限にとどまるという主張の中に物理が含まれているのである．再びこのスケーリングは，パートンによる点状散乱として解釈することができるが，パートンはクォークの量子数を持つと仮定することにしよう．

“実験室”系における断面積は，W_1，W_2，W_3 を用いて

$$d\sigma^{(\nu)}=\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{4k\cdot p}4\pi MN_{\mu\nu}W^{\mu\nu}_{(\nu)}\frac{d^3k'}{2k'(2\pi)^3} \tag{11.16}$$

からいつもの手続きを経て導かれる（式(7.9) 参照）．“実験室”系の変数を用いて表すと結果は

$$\frac{d^2\sigma^{(\nu)}}{dQ^2d\nu}=\frac{G_F^2}{2\pi}\frac{k'}{k}\left(W_2^{(\nu)}\cos^2(\theta/2)+W_1^{(\nu)}2\sin^2(\theta/2)+\frac{(k+k')}{M}\sin^2(\theta/2)W_3^{(\nu)}\right) \tag{11.17}$$

である（問題 11.1）．入射粒子が反ニュートリノであると，W_3 の項の符号がかわる．ニュートリノ散乱には変数

$$x=Q^2/2M\nu \tag{11.18}$$

$$y=\nu/k \tag{11.19}$$

を用いる習慣である．しばらく定石計算を行ったのち，断面積は Bjorken のスケーリング関数を用いて

$$\frac{d^2\sigma^{(\nu)}}{dxdy}=\frac{G_F^2}{2\pi}s\left(F_2^{(\nu)}\frac{1+(1-y)^2}{2}+xF_3^{(\nu)}\frac{1-(1-y)^2}{2}\right) \tag{11.20}$$

の形に書ける(問題 11.1 参照)．この式でスピン 1/2 の構成素子について成り立つ関係（式(7.33)，Callan-Gross の関係式）

$$2xF_1^{(\nu)}=F_2^{(\nu)} \tag{11.21}$$

を仮定してある．

基礎になるパートンの断面積は，前章の νe の散乱と同じ方法で容易に計算できる．結果は

$$\nu q,\ \bar{\nu}\bar{q}:\qquad \frac{d^2\sigma}{dxdy}=\frac{G_F^2}{\pi}sx\delta(x-Q^2/2M\nu) \tag{11.22a}$$

$$\nu\bar{q},\ \bar{\nu}q:\qquad \frac{d^2\sigma}{dxdy}=\frac{G_F^2}{\pi}sx(1-y)^2\delta(x-Q^2/2M\nu) \tag{11.22b}$$

である（問題 11.2参照）．$\nu\bar{q}$，$\bar{\nu}q$ 散乱における因子 $(1-y)^2$ が必要な理由は，ヘリシティーの議論から簡単にわかるように，カレントの $V-A$ の性格と角運

動量の保存から，$y=1$ では（重心系での後方散乱）この散乱は禁止されるからである（Perkins，1987）．

Cabibbo 角を 0 におく近似で，寄与する過程は

$$\nu \mathrm{d} \to \mathrm{l}^- \mathrm{u} \tag{11.23 a}$$

$$\nu \bar{\mathrm{u}} \to \mathrm{l}^- \bar{\mathrm{d}} \tag{11.23 b}$$

$$\bar{\nu} \mathrm{u} \to \mathrm{l}^+ \mathrm{d} \tag{11.23 c}$$

$$\bar{\nu} \bar{\mathrm{d}} \to \mathrm{l}^+ \bar{\mathrm{u}} \tag{11.23 d}$$

である．電子散乱の場合とまったく同じ進め方を経て（7.2，3 節），結果

$$F_2^{\nu \mathrm{p}} = F_2^{\bar{\nu} \mathrm{n}} = 2x[d(x) + \bar{u}(x)] \tag{11.24 a}$$

$$F_3^{\nu \mathrm{p}} = F_3^{\bar{\nu} \mathrm{n}} = 2[d(x) - \bar{u}(x)] \tag{11.24 b}$$

$$F_2^{\nu \mathrm{n}} = F_2^{\bar{\nu} \mathrm{p}} = 2x[u(x) + \bar{d}(x)] \tag{11.24 c}$$

$$F_3^{\nu \mathrm{n}} = F_3^{\bar{\nu} \mathrm{p}} = 2[u(x) - \bar{d}(x)] \tag{11.24 d}$$

に到達する．

このクォーク・パートンの枠組から，たくさんの簡単で洗練された結果が出てくる．例えば，式(7.60 a)，(7.60 b) の 2 つの和法則を結合すると

$$3 = \int_0^1 \mathrm{d}x[u(x) + d(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x)] = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x(F_3^{\nu \mathrm{p}} + F_3^{\nu \mathrm{n}}) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x F_3^{\nu \mathrm{N}} \tag{11.25}$$

となり，Gross-Llewellyn Smith の和法則（1969）と言われる．これは 1 核子あたりの価クォークの数は 3 個であることを述べている．CDHS 協同研究（de Groot *et al*.，1979）は実験値

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x(F_3^{\nu \mathrm{p}} + F_3^{\nu \mathrm{n}}) = 3.2 \pm 0.5 \tag{11.26}$$

を引用している．電子散乱およびニュートリノ散乱の F_2 関数は，この物理像では簡単な関係にあるはずである．式(7.54)，(7.57) より

$$F_2^{\mathrm{eN}} \equiv \frac{1}{2}(F_2^{\mathrm{ep}} + F_2^{\mathrm{en}}) = \frac{5}{18}x(u + \bar{u} + d + \bar{d}) + \frac{1}{9}x(s + \bar{s}) + \cdots \tag{11.27}$$

であるが，一方式(11.24 a)，(11.24 c) より

$$F_2^{\nu \mathrm{N}} \equiv \frac{1}{2}(F_2^{\nu \mathrm{p}} + F_2^{\nu \mathrm{n}}) = x(u + d + \bar{u} + \bar{d}) \tag{11.28}$$

である．ストレンジネスを持たないクォークの寄与が大部分であると仮定すると，アイソ・スカラーの標的に対するニュートリノと電子散乱の構造関数は，

近似的に比 18/5 をなす．これは核子内における u および d クォークの 2 乗平均電荷の逆数である．図 11.5 はこのような比較を示す．一致は極めて良く，クォーク・パートン模型とクォークの分数電荷の考えを確めたことになる．$F_2^{\nu N}$ ($\sim 1/2$) の積分についてはすでに 7.3 節で論じた．

式(11.22)，(11.24) より y について 0 から 1 まで積分する．核子の中にクォークのみ存在する（反クォークは存在しない）とすれば，ν および $\bar{\nu}$ の全アイソ・スカラー断面積の比は $\sigma^{\nu}/\sigma^{\bar{\nu}}=3$ となる．この比を図 11.5 に示してあるが，この比はどうも 3 より小さい．したがって"海"クォークの中には反クォークが存

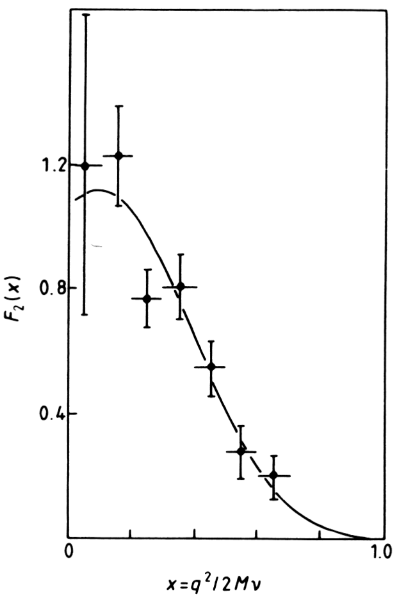


図 11.5 $F_2^{\nu N}$ と F_2^{eN} の比較．前者は CERN の陽子シンクロトロンのニュートリノ・ビームと Gargamelle 泡箱（重い液体）を用いてニュートリノ・核子散乱で測定した．後者は同じ領域 ($q^2>1$) において SLAC の電子・核子散乱で測定した結果．データの点はニュートリノ散乱の測定結果，曲線は電子散乱の実験に合わせたものに因子 18/5 を乗じた．これは核子の中の u, d クォークの電荷自乗平均の逆数である．この結果はクォークに分数電荷を指定することの実験的検証である．(Perkins D. 高エネルギー物理学入門，第 2 版，Addison-Wesley (1982))

在する．一般的に，式(11.24 a)，(11.24 b)から，ニュートリノ反応はクォークと反クォークの寄与を分離する．これは $V-A$ 相互作用が両者に対して違うように働くからである．図 11.6 は $F_2^{\nu N}=x(u+d+\bar{u}+\bar{d})$ と $xF_3^{\nu N}=x(u+d-\bar{u}-\bar{d})$ の CDHS 協同研究の分布である (de Groot *et al*., 1979)．これから xq, $x\bar{q}$ のそれぞれの分布を取り出すことができるが，例えば，以前に推測したように，$x\bar{q}$ (海) の分布は小さい x のところに集中している．

11.3　中性カレント

今まで取り扱ってきた荷電カレントによる弱い相互作用の現象論では，あるタイプの反応は (少なくとも最低次の近似では) 禁止される．典型的な実例は，個別反応

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- \tag{11.29}$$

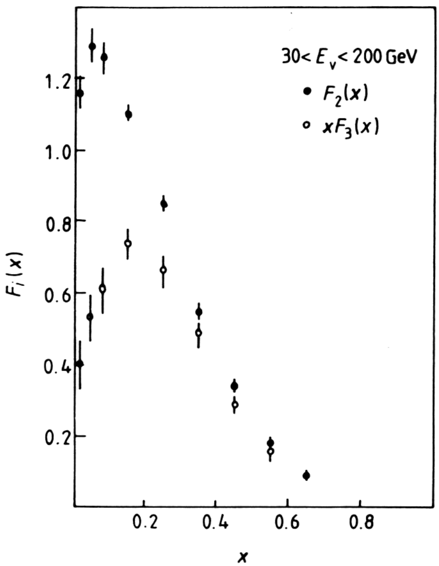


図 11.6　30<E_ν<200 GeV の範囲にわたるデータを平均したときの $F_2(x)$ および xF_3 (x) (de Groot *et al*., 1979)

および，これに類似した包含反応

$$\nu_\mu + \mathrm{p} \to \nu_\mu + \mathrm{X} \tag{11.30}$$

である．後者の反応は，実験的には終わりの状態に μ^- 粒子が観測されない過程として判別される．もしこれらの反応が，荷電カレントによる反応の強さと同じ程度の強さで起こるならば，<u>中性カレント</u>が必要である．中間ベクトルボソンのモデルで言えば，これは重い中性の弱いボソン Z^0 の存在に対応するであろう(図 11.7)．1973 年，中性カレントの反応が初めて発見され(たとえば，Cundy (1974))，それ以後一連の新しい実験が行われた．荷電カレントの場合と同じく，中性カレントの正確な形を決定するためには，たくさんの精密な実験が必要である．中性カレントも荷電カレントなみに，ベクトル・カレントと軸性ベクトル・カレントとの混合であると仮定すれば，カレントをレプトンとクォークの右回り結合および左回り結合としてパラメーター化するのが便利である．

(1)　ニュートリノの中性カレントの振幅

$$\langle \nu | \hat{j}^{\mathrm{N}}_\mu | \nu \rangle = g_{\mathrm{N}} c^\nu \bar{u}(\nu) \gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} u(\nu) \tag{11.31}$$
$$\nu = \nu_{\mathrm{e}},\ \ \nu_\mu,\ \ \nu_\tau,\ \ \cdots$$

(2)　荷電レプトンの中性カレントの振幅

$$\langle l | \hat{j}^{\mathrm{N}}_\mu | l \rangle = g_{\mathrm{N}} \bar{u}(l) \gamma_\mu \left(c^l_{\mathrm{L}} \frac{(1-\gamma_5)}{2} + c^l_{\mathrm{R}} \frac{(1+\gamma_5)}{2} \right) u(l) \tag{11.32}$$
$$l = \mathrm{e}^-,\ \ \mu^-,\ \ \tau^-,\ \ \cdots$$

(3)　クォークの中性カレントの振幅

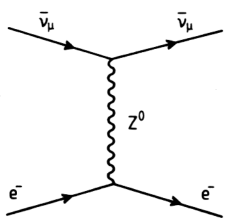


図 11.7　中性の弱いベクトルボソン Z^0 によって伝達される中性カレント反応 $\bar{\nu}_\mu \mathrm{e}^- \to \bar{\nu}_\mu \mathrm{e}^-$

$$\langle q\,|\,\hat{j}_{\mu}^{\mathrm{N}}\,|\,q\rangle = g_{\mathrm{N}}\bar{u}(q)\gamma_{\mu}\left(c_{\mathrm{L}}^{q}\frac{(1-\gamma_5)}{2}+c_{\mathrm{R}}^{q}\frac{(1+\gamma_5)}{2}\right)u(q) \tag{11.33}$$

$$q=\mathrm{u},\ \mathrm{d},\ \mathrm{s},\ \mathrm{c},\ \mathrm{b},\ \mathrm{t},\ \cdots$$

式(11.31) ないし (11.33) においては，前章にならって，これらの現象論的パラメーターと，第14章のGSW理論との比較が容易になるような振幅の表し方とを採用した．因子 g_{N} を抜き出して，これが，荷電カレントの諸過程と比較した中性カレントの諸過程の全体的な強さを決めるものと考える．いろいろな係数 c は，各種の中性カレント過程の相対的な振幅を決める．ニュートリノやレプトンやクォークの種類は，そこに示してあるようなタイプにあとで拡張することを予期して選んである．クォークの中性カレントについては“対角型”の中性カレントのみが仮定されている — たとえばdクォークとsクォークの間の遷移はない．これは中性カレントによる崩壊 $\mathrm{K_L^0}\to\mu^+\mu^-$ が，平行した荷電カレントによる崩壊 $\mathrm{K}^+\to\mu^+\nu_\mu$ にくらべて相対的にきわめて強く抑制されているため，ストレンジネスの変わる中性カレントの大きさに，きびしい制限がついてしまうからである．この点については次節で再び立ち戻る．

いろいろなフェルミオンのうちニュートリノだけが，純粋に左回りの相互作用で結合するように仮定されていることに注意してほしい．パラメーター c_{L}^{l}，c_{R}^{l} をレプトンについて決定し，$c_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}$，$c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}}$ その他をクォークについて決定することは，いっさい実験による．

クォークの中性カレントの結合に関する知識は，もちろん，主として中性カレントによる深非弾性ニュートリノ散乱から得られる．クォーク・パートン模型が有用な第1近似になる Q^2 や ν の範囲では，この種の実験はクォークの結合について直接の情報を与える．陽子・中性子の標的のほかにアイソスカラーの標的を用い，ニュートリノおよび反ニュートリノの全断面積と y 分布 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}y$ を知れば，いろいろな結合を分離することができる．また

$$\nu+\mathrm{N}_{I=0}\to\nu+\pi^{\pm}+\mathrm{X} \tag{11.34}$$

のような半包含反応のデータ，および

$$\nu+\mathrm{p}\to\nu+\Delta \tag{11.35}$$

のような特別な個別反応のデータも利用されている．これらの結合を分離決定する技法，その精度，スケーリング則の破れの効果，等々に関しては，最近の

会議報告を参照されたい.

一方, レプトンの結合 c_{L}^{l}, c_{R}^{l} は, 純粋にレプトンのみが関与する中性カレントの反応

$$\nu_\mu + \mathrm{e}^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^- \tag{11.36}$$

$$\bar{\nu}_\mu + \mathrm{e}^- \to \bar{\nu}_\mu + \mathrm{e}^- \tag{11.37}$$

によって, もっとも良く決められる. これらの結果と, 散乱過程

$$\bar{\nu}_{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^- \to \bar{\nu}_{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^- \tag{11.38}$$

を測定する原子炉の実験とを組み合わせれば, さらに情報を増やすことができる. ふたたび, 最新の解析結果については折々の会議報告を参照していただきたい.

いま弱い中性カレントのパラメーターがどう実験から決められているかその方法を述べたが, 理論の挑戦は, その結果を予言し説明することである. 中性カレントの存在を予言するのみならず, 個々の結合の大きさまできわめてよく予言する弱い相互作用の理論が現実に存在することは, まことにめざましい成果である. この理論が弱い相互作用の Glashow-Salam-Weinberg (GSW) 理論であって, 第 14 章で詳しく論ずる. ここでは単に, 中性カレントに対する GSW 理論の予言を引用するに止めよう.

$$g_{\mathrm{N}} = g/\cos\theta_{\mathrm{W}} \tag{11.39}$$

および

$$c^{\nu} = \frac{1}{2} \tag{11.40 a}$$

$$c_{\mathrm{L}}^{l} = -\frac{1}{2} + a, \qquad c_{\mathrm{R}}^{l} = a \tag{11.40 b}$$

$$c_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a, \qquad c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}} = -\frac{2}{3}a \tag{11.40 c}$$

$$c_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}a, \quad c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{3}a \tag{11.40 d}$$

ただし

$$a = \sin^2\theta_{\mathrm{W}} \tag{11.41}$$

であって, θ_{W} を Glashow-Weinberg 角 (Glashow, 1961, Weinberg, 1967) と言う. 荷電カレントの結合を制約する弱い相互作用全般のパラメーター g (式 (11.39) 参照) を用いて, すべての中性カレントの結合定数はただひとつのパラ

メーター θ_W で表されてしまう．実験的に決定された諸結合パラメーターは，この予言ときわめてよく一致し，$\sin^2\theta_W$ の値はほぼ 0.23 である．ニュートリノの中性カレントは別として，ほかの中性カレントは純粋の $V-A$ 型ではないように見えるが，これは荷電カレントにくらべて注目すべき結果である．関係式(11.40)の左辺に粒子を区別する指標が表れていないのは，この理論では任意の"種"のすべての粒子（中性のレプトン ν_e，ν_μ，ν_τ，……，荷電レプトン e^-，μ^-，τ^-，……，電荷 2/3 を持つクォーク u，c，t，……，電荷 $-1/3$ を持つクォーク d，s，b，……）が，すべて同じ形で結合すると仮定されているからである．

たとえば $c^{\nu_e}=c^{\nu_\mu}=c^{\nu_\tau}=\cdots\cdots=1/2$ である．

11.4　チャームと GIM 機構

荷電カレントのフレイバーに関する性質は，d クォークと s クォークの間に Cabibbo の混合を入れて，ハドロンの弱いカレントを行列の形に書いてまとめることができた．電荷をひとつ増やす弱いカレントは

$$j^+_{\rm wk}\sim g(\bar{u},\ \ \bar{d}_C)\tau_+\begin{pmatrix}u\\ d_C\end{pmatrix} \tag{11.42}$$

の形を持つ．ここに

$$d_C=d\cos\theta_C+s\sin\theta_C \tag{11.10}$$

$$\frac{\tau_+}{2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{11.43}$$

である．明らかに電荷をひとつ減らすカレントは

$$j^-_{\rm wk}\sim g(\bar{u},\ \ \bar{d}_C)\tau_-\begin{pmatrix}u\\ d_C\end{pmatrix},\qquad \frac{\tau_-}{2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{11.44}$$

の形を持つ．それではクォークの中性カレントのフレイバーの性質については，何が言えるであろうか．弱いカレントは電荷を帯びていても中性であっても，その基盤にあるゲージ理論にとって妥当なものであるべしという仮説から，きわめて重要な手がかりが得られる．よく知られた電磁カレントは，まさにこのようになっている．第 2 章，第 3 章で見たように，ゲージ理論は対称性に基づいている．関与する対称性は，すでに述べた"弱いアイソスピン"の対称性で

ある．ハドロンのアイソスピンとまったく同様に，τ^{+}，τ^{-} は弱いアイソスピンの第 3 成分を 1 単位上げるか下げる行列として作用する．しかしハドロンのアイソスピンとの類推からわかるように，この 2 つだけが関連した行列ではない．完全な対称性は交換関係

$$[\tau_{+}/2,\ \ \tau_{-}/2]=\tau_{3}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{11.45}$$

で与えられるような行列 τ_3 をも含まなくてはならない．のちに第 14 章で論ずるように，弱いアイソスピンに基づくゲージ理論は，

$$j^{0}_{\mathrm{wk}}\sim g(\bar{u},\ \ \bar{d}_{\mathrm{C}})\tau_{3}\begin{pmatrix}u\\ d_{\mathrm{C}}\end{pmatrix} \tag{11.46}$$

の形のカレントを必然的に含むはずである．これは電荷を保存する遷移 $u\rightarrow u$，$d_{\mathrm{C}}\rightarrow d_{\mathrm{C}}$ を表すから，弱い中性カレントである．

残念ながら，この簡単な中性カレントは実験的には否定される．それは $\bar{d}_{\mathrm{C}}d_{\mathrm{C}}$ はストレンジネスの変わる中性カレント

$$\bar{d}_{\mathrm{C}}d_{\mathrm{C}}=\bar{d}d\cos^{2}\theta_{\mathrm{C}}+\bar{s}s\sin^{2}\theta_{\mathrm{C}}+\bar{d}s\sin\theta_{\mathrm{C}}\cos\theta_{\mathrm{C}}+\bar{s}d\sin\theta_{\mathrm{C}}\cos\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.47}$$

を含むが，実験的には，このようなストレンジネスの変わる中性カレントはきわめて強く抑制されているからである（素粒子の諸性質，1984 年度版†）．たとえば

$$\text{分岐比}\quad (\mathrm{K}^{0}_{\mathrm{L}}\rightarrow\mu^{+}\mu^{-})=(9.1\pm1.9)\times10^{-7}\,\% \tag{11.48 a}$$

と

$$\text{分岐比}\quad (\mathrm{K}^{+}\rightarrow\mu^{+}\nu_{\mu})=(63.50\pm0.16)\% \tag{11.48 b}$$

を比べてみよ．この事実はあきらかに最低次の $\mathrm{Z}_{0}\bar{\mathrm{d}}\mathrm{s}$ 結合を排除している．

もし弱い相互作用を弱いアイソスピンの対称性に基づく理論で記述しそれをゲージ化する，とだけ考えるならば，それはおおいに問題であるということを強調しておきたい．ゲージ化の正当性は次の章で論じ，その後の章では“隠れ

†（訳注）Physics Letters B 誌に 2 年ごとに発表される素粒子のリストとその性質の集大成．この情報編集計画の歴史については A. H. Rosenfeld, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **25**,555 (1975) に詳述されている．

た非可換（非 Abel 型）”ゲージ理論について解説して，しだいに GSW 理論へ集約してゆくつもりである．今後の議論の展開を先取りして言うならば，中性カレントの問題は GIM 機構と呼ばれるきわめて洗練された仮説で解決されるのである（Glashow，Iliopoulos & Maiani，1970）．電荷 Q で標示した“弱い”2 重子

$$\begin{pmatrix} u \\ d_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Q=\dfrac{2}{3} \\ Q=-\dfrac{1}{2} \end{matrix} \tag{11.9}$$

は，“Cabibbo 回転”を行った d および s クォークの組み合わせ

$$d_{\mathrm{C}}=d\cos\theta_{\mathrm{C}}+s\sin\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.10}$$

を含み，帯電した弱いカレントに効く．GIM 機構は，$Q=2/3$ を持つ新しい荷電クォーク c と，$Q=-1/3$ を持ち d_{C}（式(11.10)）に直交する d クォークと s クォークの組み合わせから成る第 2 の弱い 2 重子

$$\begin{pmatrix} c \\ s_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Q=+\dfrac{2}{3} \\ Q=-\dfrac{1}{3} \end{matrix} \tag{11.49}$$

$$s_{\mathrm{C}}=-d\sin\theta_{\mathrm{C}}+s\cos\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.50}$$

の存在を仮定する．新しいクォーク c をチャーム・クォークと呼ぶ．完全な中性カレントは，式(11.46)と，新しい 2 重子から作られる同様なカレントとの和であると考える．

$$j^0_{\mathrm{wk}}\sim g(\bar{u},\ \bar{d}_{\mathrm{C}})\tau_3\begin{pmatrix} u \\ d_{\mathrm{C}} \end{pmatrix}+g(\bar{c},\ \bar{s}_{\mathrm{C}})\tau_3\begin{pmatrix} c \\ s_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} \tag{11.51}$$

$Q=-1/3$ のクォークに対しては，ただちに

$$\bar{d}_{\mathrm{C}}d_{\mathrm{C}}+\bar{s}_{\mathrm{C}}s_{\mathrm{C}}=\bar{d}d+\bar{s}s \tag{11.52}$$

が得られ，望ましくない $\bar{d}s$，$\bar{s}d$ 項は打ち消しあってしまう．Z^0 粒子は $\bar{d}d$，$\bar{s}s$ のみを直接結合し，“フレイバーについて対角的”である．

GIM がこの提案を行ったとき，チャームを持つ状態はまだ発見されておらず，低エネルギー領域のハドロン分光学でも弱い相互作用の現象面でも，チャー

ム・クォークを必要としてはいなかった．GIM は，チャーム・クォークは比較的重い質量を持つために，低エネルギー領域では現れないとした．しかし，これは簡単な逃げ道というだけではなかった．彼らは $K_L^0 \to \mu^+\mu^-$ の崩壊率に基づいた議論から c クォークの質量を評価しているのである．GIM 機構は，確かに $\Delta S \neq 0$ の中性カレントの効果を最低次で打ち消すことには成功したが，もし c クォークが u クォークにくらべて非常に重いとすれば，$K_L^0 \to \mu^+\mu^-$ の振幅（実験的な上限(11.48) 参照）には，容認できないほど大きい高次の効果が効くことになる．

GIM の議論は次のとおりである．$K_L^0 \to \mu^+\mu^-$ 崩壊の 1 次の寄与（中間状態に Z^0 粒子がただ 1 個存在する）はあからさまに消えるが，図 11.8 (*a*) に示すような 2 個の W 粒子を中間状態に持つ振幅は 0 ではない．u クォークの交換を含む寄与はほぼ $G\alpha$ のけたの振幅を与えるが，これは実験的な崩壊率に比べて大きすぎる．GIM 機構は c クォークの交換によるもうひとつの図形（図 11.8 (*b*)）を与えるが，これが抑制因子をもたらす．頂点の結合を比較すると，u クォークは振幅

$$\mathscr{A}_u \sim g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C \tag{11.53}$$

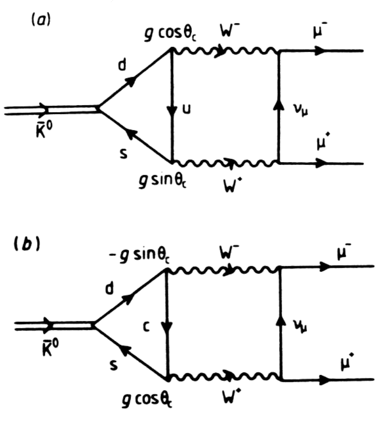


図 11.8　$\triangle S \neq 0$ の弱い中性の遷移 $K_L^0 \to \mu^+\mu^-$ に寄与する 2 W 中間状態（*a*）u 交換の図形（*b*）c 交換の図形

を生じ，一方 c クォークは振幅

$$\mathscr{A}_{\mathrm{c}} \sim -g^4 \sin\theta_{\mathrm{C}} \cos\theta_{\mathrm{C}} \tag{11.54}$$

を生ずる．u クォークと c クォークが同じ質量を持つ極限では，両者の寄与は正確に打ち消す．c クォークの質量 M_{c} が非常に大きいと，c クォークを含む図形の寄与はきわめて小さく，u クォークを含む図形だけでは納得できる結果を与えない．GIM は実験と一致するような M_{c} の値を評価した．彼らの結論は

$$M_{\mathrm{c}} \sim 1-3\ \mathrm{GeV} \tag{11.55}$$

で，現在からさかのぼって考えると，きわめてめざましい成果である．第14章で説明するように，GIM 機構は現在では弱い相互作用の“標準モデル”の中に組み込まれている．たとえば，c クォークと中性カレントの結合の強さは u クォークと中性カレントの結合の強さと等しく，また s クォークの結合の強さと d クォークの結合の強さも等しい（前節の終わりを参照）．

11.5 結びの注記

(1) GIM 機構も GSW 理論自身も，これらの理論における閉線計算の Feynman 規則が知られる前に提唱されたことは興味深い．もっと的確にいえば，提唱された“理論”がくりこみ可能，すなわち意味のある矛盾のない摂動展開ができること，かどうかすら知られていなかった．にもかかわらず，GIM 機構の重要な物理 — チャーム — が，中性カレントの予言と同じく正しいことが証明された．これは，Feynman 規則の矛盾のない組み立てが欠けているのを単に技術的な問題とみなして，意に介さなかった創始者の強い意志と洞察力のたまものである．

(2) GIM 機構は，クォークの4つのフレイバーの間の混合をのみ考慮している．それを6つのフレイバーにどう拡張すればよいか見るには，Cabibbo 結合 (11.10)，(11.50) を行列記法で

$$\begin{pmatrix} d_{\mathrm{C}} \\ s_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathrm{C}} & \sin\theta_{\mathrm{C}} \\ -\sin\theta_{\mathrm{C}} & \cos\theta_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = O_{\mathrm{C}} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{11.56}$$

のように書く．ここに O_{C} は（直交）Cabibbo 回転行列である．この記法では，式(11.52)を保証するのは行列の直交性である．フレイバーが3であると，O_{C} は

3 行 3 列のユニタリー行列 U_{KM}（Perkins，1987，Kobayashi and Maskawa, 1973）で置き換えられる．ユニタリー条件

$$U_{\mathrm{KM}}^{\dagger} U_{\mathrm{KM}} = 1 \tag{11.57}$$

は，フレイバーの変わる中性カレントが存在しないことを示す．さらに，U_{KM} は θ_{C} に類似した 3 つの混合角のほか，ひとつの自明でない位相パラメーターを含むことが判明する．ゼロでないこの位相の値は，**CP** 非保存に対応する．したがって理論は，観測にかかる **CP** 非保存の値を予言するわけではないが，それを現象論的に組み入れることができる．

まとめ

(1) 電荷を変えるハドロンの弱いカレントの Cabbibo 型式．

(2) “弱いアイソスピン”の導入．

(3) 深非弾性ニュートリノ散乱における核子の構造関数．

(4) 弱い中性カレント．

(5) ストレンジネスを変える中性カレントの欠如．チャームおよび GIM 機構．

(6) 中性カレントの結合に関する GSW 理論の予言

問題

11.1 (a) ニュートリノと陽子の包含非弾性散乱の実験室系における微分断面積は，式(11.17)

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu)}}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu} = \frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}\frac{k'}{k}\left(W_2^{(\nu)}\cos^2(\theta/2) + W_1^{(\nu)} 2\sin^2(\theta/2) + \frac{(k+k')}{M}\sin^2(\theta/2)\, W_3^{(\nu)} \right)$$

で表されることを示せ．

(b) Bjorken のスケーリング

$$\nu W_2^{(\nu)} \to F_2^{(\nu)}, \qquad M W_1^{(\nu)} \to F_1^{(\nu)}, \qquad \nu \mathrm{W}_3^{(\nu)} \to F_3^{(\nu)}$$

を用いて断面積をスケーリング関数で表せ．質量をすべて省略すれば変数 x，y によって断面積は

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu)}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi} s \left[F_2^{(\nu)}(1-y) + F_1^{(\nu)} x y^2 - F_3 (1 - y/2) y x \right]$$

で表されることを示せ．ただし

$$\frac{k' \sin^2(\theta/2)}{M}=\frac{xy}{2}$$

が成り立つことに注意せよ．

(c)　Callan-Gross の関係式

$$2xF_1^{(\nu)}=F_2^{(\nu)}$$

を代入して式(11.20)

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu)}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_\mathrm{F}^2}{2\pi}sF_2^{(\nu)}\left(\frac{1+(1-y)^2}{2}+\frac{xF_3^{(\nu)}}{F_2^{(\nu)}}\frac{1-(1-y)^2}{2}\right)$$

を導け．

11.2　荷電カレントによる $\nu_\mu \mathrm{q}$ 散乱の微分断面積は，質量を無視したときの $\nu_\mu \mathrm{e}^- \to \mu^- \nu_\mathrm{e}$ 反応（問題 10.5）の断面積と同じ形を持っている．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}(\nu\mathrm{q})=\frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}$$

(a)　反クォークによる散乱 $\nu_\mu \bar{\mathrm{q}}$ は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}(\nu\bar{\mathrm{q}})=\frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}(1-y)^2$$

の形を持つことを示せ．

(b)　これから式(11.22) を導け．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(\nu\mathrm{q})=\frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}sx\delta(x-Q^2/2M\nu)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(\nu\bar{\mathrm{q}})=\frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}sx(1-y)^2\delta(x-Q^2/2M\nu)$$

ここに M は核子の質量である．

(c)　パートン模型の予言

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}sx[q(x)+\bar{q}(x)(1-y)^2]$$

を用いて，次の2つの関係式を導け．

$$F_2^{(\nu)}(x)=2x[q(x)+\bar{q}(x)]$$

$$\frac{xF_3^{(\nu)}(x)}{F_2^{(\nu)}(x)}=\frac{q(x)-\bar{g}(x)}{q(x)+\bar{q}(x)}$$

第 12 章　弱い相互作用の現象論に伴う難点

前の 2 つの章では弱い相互作用の "V—A 流れ積" 現象論を展開してきた．この現象論を理論に格上げしようとする多くの試み，あるいはこの現象論が低エネルギー極限になっているような新しい理論をつくる試みがなされてきた．今日，われわれは GSW 理論が現在到達できるエネルギー領域まで弱い相互作用を正しく現実に記述できることを知っているのだから，Fermi 理論あるいは簡単な IVB 理論に伴う難点についてさらに論ずることは，余計なことだと言われかねない．しかし，これらの難点はいくつか原理的に重要な論点をあきらかにし，それらを理解することは GSW 理論への貴重な動機になっているのである．

12.1　点 4 フェルミオン模型におけるユニタリティーの破れ

第 10 章において，弱い相互作用の到達範囲はきわめて短く，現在到達可能なニュートリノのエネルギーまで，Fermi の点（すなわち局所的）相互作用からの断面積のずれは何ひとつ検出されておらず，W の質量に対応する長さは 2.5 $\times 10^{-18}$ m の程度であることを知った．W のことを何も知らないと仮定してみよう．中間ベクトルボソンが存在せず，相互作用の到達距離が真にゼロ（局所的あるいは点状）であるとすると，何か困ることが起こるであろうか．実際，Fermi の現象論的モデルを理論に昇格させることができるであろうか．答えは

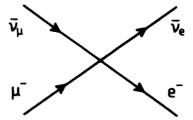


図 12.1　$\bar{\nu}_\mu+\mu^-\rightarrow\bar{\nu}_e+e^-$ の点状振幅

否である．それならばどうすればよいか，という洞察を得るために，なぜ理論になり得ないかその理由を調べてみよう．

反応(図 12.1)

$$\bar{\nu}_\mu + \mu^- \to \bar{\nu}_e + e^- \tag{12.1}$$

を点相互作用のモデルで考える．この相互作用を基本的であるとみなし，摂動論の最低次で取り扱う．第 10 章ですでに類似した過程の議論を展開した．難点は高エネルギー領域で起こるのだから，レプトンの質量 m_e, m_μ を省略して表式を簡単にしても結論は変わらない．この極限では，数因子まで含めて不変振幅は

$$F = G_F E^2(1+\cos\theta) \tag{12.2}$$

である(問題 12.1)．E は重心系のエネルギー，θ は重心系の散乱角である．この振幅から全断面積は

$$\sigma \sim G_F^2 E^2 \tag{12.3}$$

というふるまいを示す．この反応の部分波解析を考えよう．スピンを持たない粒子については，全断面積は部分波断面積の総和として

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_J (2J+1)|f_J|^2 \tag{12.4}$$

と書ける．ここに f_J は部分波の振幅，k は重心系の 3 元運動量である．部分波の振幅を位相のずれ δ_J を用いて

$$f_J = e^{i\delta_J}\sin\delta_J \tag{12.5}$$

のように書けるということは，ユニタリティー，あるいはフラックスの保存則の結果である (たとえば Gasiorowicz (1974) の 184，383 頁参照)．したがって

$$|f_J| \leqslant 1 \tag{12.6}$$

が成り立ち，各部分波の断面積は

$$\sigma_J \leqslant 4\pi(2J+1)/k^2 \tag{12.7}$$

のような上限を持つ．これは重心系のエネルギーが増えるにつれて減少する．これにくらべて，4 フェルミオン相互作用のモデルから得た断面積は

$$\sigma \sim E^2 \tag{12.8}$$

のように重心系のエネルギーとともに増加する．さらに，振幅(12.2)は $\cos\theta$ のゼロ乗と 1 乗のみを含むから，断面積の増加はごく少数の部分波にのみ関係し

ており，和の中でどんどん部分波の数が増えるから断面積が増加するのではない．したがって，あるエネルギー E では，ユニタリティーの限界が最低次（Born近似）で破れることになろう．

これが局所的理論の“ユニタリティー病”の本質である．しかし，すべての論点を正確に押えてゆくためには，関与する粒子がすべてスピンを持つ場合について，適切かつ注意深く部分波解析を行う必要がある．そのような詳細な取り扱いはここでは敬遠して，そのかわり精密な解析の結果だけを略述しよう．質量を持たないスピン 1/2 の粒子が $V-A$ の相互作用を行うとき，ヘリシティーが保存することはすでに論じた．スピン構造の実効的効果は，式(12.2)の中に因子 $(1+\cos\theta)$ を生ずることである．このことは，角運動量 J_z が重心系における μ^- の運動方向に量子化されているとき，$J_z=-1$ の始めの状態が，$V-A$ 相互作用で要求される $J_z=+1$ の終状態に遷移することは，角運動量の保存により $\theta=\pi$ では禁止される $((1+\cos\theta)=0)$ ことを表している．この角運動量の保存を表す運動学的因子を抜き出せば，残りの振幅は $J=0$ の，スピンのない過程に対して適切な振幅であるとみなすことができる（ほかに $\cos\theta$ を含む因子がないから）．したがって

$$f_{\mathrm{eff}}^{J=0}\sim G_{\mathrm{F}}E^2 \tag{12.9}$$

であり，ユニタリティーの限界は重心系のエネルギー

$$E\gtrsim G_{\mathrm{F}}^{-1/2}\sim 300\ \mathrm{GeV} \tag{12.10}$$

に対して破れる．

局所的理論に伴うこの難点は，Fermi の結合定数 G_{F} が無次元でないという事実と直接に結びついている．ミューオンの崩壊率から算出した G_{F} の値は

$$G_{\mathrm{F}}\simeq(1.16637\pm0.00002)\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \tag{12.11}$$

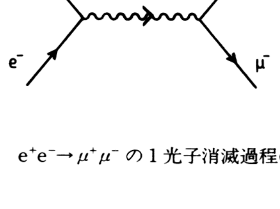


図 12.2　$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ の 1 光子消滅過程の図形

であり（素粒子の性質，1984 年版），次元 $[M]^{-2}$ を持っている．この事実だけから，高エネルギー領域の $\bar{\nu}_\mu\mu^- \to \bar{\nu}_e e^-$ 反応の断面積の形を，計算を行うことなく求めることができる．断面積は次元 $[L]^2=[M]^{-2}$ を持ち，かつ次元 $[M]^{-4}$ を持つ $G_F{}^2$ を因子として含むはずである．断面積はまた，相対論的に不変でなくてはならない．レプトンの質量より十分高いエネルギー領域では，断面積に正しい次元を回復するために用い得る唯一の不変量は s，すなわち重心系のエネルギー E の 2 乗である．したがって $\sigma \sim G_F^2 E^2$ である．

この困難に直面して，理論を改良するためこれからたくさんの提案を行いたいのであるが，その手始めとして，QED の類似過程ではどうなっているのか調べてみよう．最低次で過程 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ を考える（図12.2）．レプトンの質量をすべて無視するとき，この過程の全断面積は第 6 章で計算した．この結果は

$$\sigma = 4\pi\alpha^2/3E^2 \tag{12.12}$$

であった（問題 6.7 および式(7.78)）．この断面積はユニタリティーが要求するように，エネルギーとともに素直に減少する．この場合は G_F に相当する結合定数 α が無次元であって，因子 E^2 が分母にこなければ断面積の次元が $[L]^2$ にならないのである．

QED からこういう手がかりを得たと考えるならば，無次元の結合定数を含む弱い相互作用の理論を探せばよいことになる．q^2 の小さい領域で成り立つ対応

$$G_F \sim g^2/M_W^2 \tag{12.13}$$

からわかるように，第 10 章で導入された中間ベクトルボソンのモデルは，こういう理論のひとつである．したがって次に，この理論を弱い相互作用の理論の候補として調べてみよう．

12.2　中間ベクトルボソンのモデルにおけるユニタリティーの破れ

この節の標題が明示するように，中間ベクトルボソンのモデルをとっても事態はけっして基本的に好転しない．どうしてそうなるのか調べてみよう．再び過程 (12.1) を考えるが，今度は図 12.3 に示すように，質量 M のただひとつのベクトルボソン W^- から成る中間状態を経て進行すると見る．この図形はもちろん，前の図 12.2 と非常によく似ているが，重要な違いは，図 12.2 では内線を表す粒子は質量を持たない光子，図 12.3 では質量を持つ W 粒子であることで

ある．第 10 章で論じたように，質量を持つ W 粒子の伝播関数は

$$\frac{-g^{\mu\nu}+k^{\mu}k^{\nu}/M^2}{k^2-M^2} \tag{12.14}$$

であり，図 12.3 の図形に対する振幅は

$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\bar{u}(\mathrm{e})\gamma_{\mu}\frac{(1-\gamma_5)}{2}v(\nu_{\mathrm{e}})\left(\frac{-g^{\mu\nu}+k^{\mu}k^{\nu}/M^2}{k^2-M^2}\right)\bar{v}(\nu_{\mu})\gamma_{\nu}\frac{(1-\gamma_5)}{2}u(\mu) \tag{12.15}$$

である．ここに k は W 粒子の 4 元運動量，g は式(10.89) に現れる無次元の結合定数である．

式(12.15) を図 12.2 の振幅

$$\mathrm{i}e^2\bar{v}(\mathrm{e})\gamma_{\mu}u(\mathrm{e})\left(\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2}\right)\bar{u}(\mu)\gamma_{\nu}v(\mu) \tag{12.16}$$

と比較してみよう．k は光子の 4 元運動量である．一見したところ，式(12.15) の高エネルギー領域でのふるまいは，分子の $k^{\mu}k^{\nu}$ 因子によって，式(12.16) のふるまいよりずっと“悪く”なっていると見えるかもしれない．しかし，この因子は無害であることがすぐわかる．まず 4 元運動量の保存則により

$$\begin{aligned} k^{\mu}\bar{u}(\mathrm{e})\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)v(\nu_{\mathrm{e}}) &= (p_{\mathrm{e}}^{\mu}+p_{\bar{\nu}}^{\mu})\bar{u}(\mathrm{e})\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)v(\nu_{\mathrm{e}}) \\ &= \bar{u}(\mathrm{e})\not{p}_{\mathrm{e}}(1-\gamma_5)v(\nu_{\mathrm{e}})+\bar{u}(\mathrm{e})\not{p}_{\bar{\nu}}(1-\gamma_5)v(\nu_{\mathrm{e}}) \end{aligned} \tag{12.17}$$

が成り立ち，Dirac 方程式 $\bar{u}(\mathrm{e})\not{p}_{\mathrm{e}}=m_{\mathrm{e}}\bar{u}(\mathrm{e})$，$\not{p}_{\bar{\nu}}v(\nu_{\mathrm{e}})=0$ と反交換関係 $\{\gamma^{\mu},\ \gamma_5\}=0$ を用いて

$$m_{\mathrm{e}}\bar{u}(\mathrm{e})(1-\gamma_5)v(\nu_{\mathrm{e}}) \tag{12.18}$$

となる．同じような結果が k^{ν} 因子にも成り立つので，$k^{\mu}k^{\nu}$ 因子は実は消えてしまう．実際，レプトンの質量を M に比べて無視すれば，中間ベクトルボソンの効果は，光子の伝播関数 $-g^{\mu\nu}/k^2$ を $-g^{\mu\nu}/(k^2-M^2)$ で置き換えることになる．QED の断面積 (12.12) がエネルギーの増加に伴って減少するのは，力学的意味

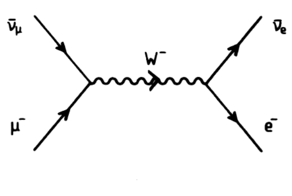


図 12.3　$\bar{\nu}_{\mu}+\bar{\mu}\to\bar{\nu}_{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^-$ において W^- 粒子を含む中間状態の図形

では，まさにこの光子の伝播関数のおかげであった．したがって，少なくともこの過程に関しては，4フェルミオン相互作用のモデルの中間ベクトルボソンによる修正は，最低次でユニタリティーの破れをまさに回避していることになる．

それでは，中間ベクトルボソンによる修正は，任意の次数の Born 近似で，ユニタリティーの制限を侵さないことを保証するであろうか．答えは否である．ユニタリティーの破れを起こすような過程は，図 12.3 に現れるような内線の W 粒子ではなくて，外線の W 粒子を含む過程であることが判明する．たとえば，図形図 12.4 で表される過程

$$\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \to W^+ + W^- \tag{12.19}$$

を考えよう．この反応は実験的にはいささか起こしにくい反応ではあるが，それは以下の議論には関係しない．4フェルミオン相互作用の中間ベクトルボソンによる修正として提出される理論では，必然的に図 12.4 に示される振幅が引き起こされ，この振幅がユニタリティーを壊すから，理論は受けいれるわけにいかないことになるのである．さてこの過程の振幅は

$$\begin{aligned} M_{\lambda_1\lambda_2} = g^2 \varepsilon_\mu^{-*}(k_2,\lambda_2)\varepsilon_\nu^{+*}(k_1,\lambda_1)\,\bar{v}(p_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5) \\ \times \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_\mu)}{(p_1-k_1)^2 - m_\mu^2}\gamma^\nu(1-\gamma_5)u(p_1) \end{aligned} \tag{12.20}$$

に比例する．$\varepsilon^\pm$ は W 粒子の偏極ベクトルである．さらに詳しくは $\varepsilon_\mu^{-*}(k_2,\ \lambda_2)$ は 4 元運動量 k_2，偏りの状態 λ_2 を持つ射出 W^- 粒子の偏極ベクトル，ε_ν^{+*} も同様な指標で指定される射出 W^+ 粒子の偏極ベクトルである．

全断面積を計算するには，$|M|^2$ を作りそれぞれの W 粒子の 3 つの偏極状態

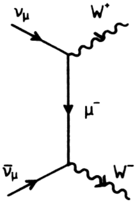


図 12.4　$\nu_\mu\bar{\nu}_\mu \to W^+W^-$ の μ^- 交換図形

について和をとらなくてはならない．そのために，結果

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu^*(k,\lambda) = -g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/M^2 \tag{12.21}$$

を用いる必要がある．（式(12.21) の右辺は伝播関数(10.11) の分子になっていることに注意せよ，式(6.80)，(6.173) 参照）式(12.21) は，次のように偏極ベクトルをあからさまに構成することで証明することができる．自由な W 粒子の波動方程式は（式(10.17) 参照）

$$(\Box + M^2)W^\mu - \partial^\mu\partial^\nu W_\nu = 0 \tag{12.22}$$

である．この式の発散をとれば

$$\partial_\mu W^\mu = 0 \tag{12.23}$$

となり，平面波の解

$$W^\mu = \varepsilon^\mu e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{12.24}$$

に対してこれは条件

$$k\cdot\varepsilon = 0 \tag{12.25}$$

となる．これは，スピン 1 の粒子に期待されるように 3 個の独立な ε^μ（偏極ベクトル）が存在することを保証する不変式である．W 粒子の静止系では式(12.25) は

$$\varepsilon^0 = 0 \tag{12.26}$$

に還元され，3 つの独立な ε を（式(5.26)，(5.27) 参照）

$$\varepsilon^\mu(k_{\rm rest},\ \lambda) = (0,\ \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda)) \tag{12.27}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda=\pm1) = \mp 2^{-1/2}(1,\ \pm i,\ 0) \tag{12.28}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda=0) = (0,\ 0,\ 1) \tag{12.29}$$

ととることができ，したがって

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{12.30}$$

が成り立つ．これらの状態は z 軸の方向にある決まったスピン射影 $\lambda=\pm1,\ 0$ を持つ．一般の座標系に対しては $\varepsilon^\mu(k_{\rm rest},\ \lambda)$ をローレンツ変換することができる．例えば

$$k^\mu = (k^0,\ 0,\ 0,\ |\boldsymbol{k}|) \tag{12.31}$$

であれば，前のように

$$\varepsilon^\mu(k,\ \lambda=\pm1) = \varepsilon^\mu(k_{\rm rest},\ \lambda=\pm1) \tag{12.32}$$

であるが，縦偏極ベクトルは

$$\varepsilon^{\mu}(k,\ \lambda=0)=M^{-1}(|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ k^{0}) \tag{12.33}$$

のようになる．これから式(12.21) が導かれる (問題 12.3)．

いつものように，断面積の高エネルギー領域でのふるまいに関心があるのだから，式(12.21)の中の $k^{\mu}k^{\nu}/M^{2}$ の項は $g^{\mu\nu}$ の項よりも優勢になることはあきらかである．したがって，この項の物理的な出どころをよく理解しておく必要がある．すぐ前で，$k^{\mu}=(k^{0},\ 0,\ 0,\ |\boldsymbol{k}|)$ と表される座標系では，横偏極ベクトル $\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda=\pm1)$ は運動量の依存性を含まず，事実運動量の依存性はひとえに縦偏極ベクトルにのみ含まれることを学んだ．縦偏極ベクトルは

$$\varepsilon^{\mu}(k,\ \lambda=0)=\frac{k^{\mu}}{M}+\frac{M}{(k^{0}+|\boldsymbol{k}|)}\cdot(-1,\ \hat{\boldsymbol{k}}) \tag{12.34}$$

と書かれ，高エネルギー領域では k^{μ}/M に近づく．偏極ベクトルの和(12.21)の中に $k^{\mu}k^{\nu}$ の項を生じ，高エネルギー領域の実 W 粒子の生成に主要な役割を果たすのは，この縦偏極状態であることはあきらかである．

したがって縦偏極した W 粒子の生成に焦点を合わせて，次の量を調べなくてはならない．

$$\frac{g^{4}}{M^{4}(p_{1}-k_{1})^{4}}\mathrm{Tr}[\not{k}_{2}(1-\gamma_{5})(\not{p}_{1}-\not{k}_{1})\not{k}_{1}\not{p}_{1}\not{k}_{1}(\not{p}_{1}-\not{k}_{1})\not{k}_{2}\not{p}_{2}] \tag{12.35}$$

これは $|M_{00}|^{2}$ のスピン和をとるとき，m_{μ} を省略し，$(1-\gamma_{5})$ 因子を交換関係で移動させ，ニュートリノの質量が 0 であることを用いて導かれる．エネルギーについて最高次の項だけを残せば(問題 12.2 参照)

$$\sum_{\text{spins}}|M_{00}|^{2}\sim(g^{4}/M^{4})(p_{1}\cdot k_{2})(p_{2}\cdot k_{2})=(g^{4}/M^{4})E^{4}(1-\cos^{2}\theta) \tag{12.36}$$

である．ここで E は重心系のエネルギー，θ は重心系の散乱 (あるいは生成) 角である．再び式(10.93) を思い起こすと，(2 乗をしていない) 振幅は本質的に $G_{\mathrm{F}}E^{2}$ のようにふるまうはずであることがわかる．これはまさに 4 フェルミオン相互作用の場合と同じである (式(12.2) 参照)．実際，すべての数因子を整えると

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=G_{\mathrm{F}}^{2}\frac{E^{2}\sin^{2}\theta}{8\pi^{2}} \tag{12.37}$$

を得る (Gastmans, 1975)．したがって全断面積は，前と同じくエネルギー E

とともに E^2 のように増加する．縦偏極をした W 粒子の生成は純粋に $J=1$ の過程であって，$J=1$ の部分波振幅は

$$f_1 = G_F E^2/6\pi \tag{12.38}$$

である．したがってユニタリティーの制限 $|f_1| \leqq 1$ は，$E \geqq (6\pi/G_F)^{1/2} \sim 10^3$ GeV で破られることになる（式(12.10) 参照）．

このほかにもユニタリティーを壊すような過程を見いだすことは容易である．したがってこの観点からすれば，中間ベクトルボソンのモデルは，4 フェルミオン相互作用のモデルより理論と呼ぶにふさわしいとは言えない，と結論せざるを得ない．4 フェルミオン相互作用では，ユニタリティー病の原因は G_F が無次元でないからだ，と論じたが，G_F を無次元にしたところで結局この病を治すことはできなかったのである．おそらく（実はまさにそうなのであるが），無次元性は必要ではあるが十分ではないのである．（次節を参照．）なぜそうなのか．過程 $\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$ に対する式(12.20)にもどり，縦偏極ベクトルを $\varepsilon_\mu = k_\mu/M$ とおくと，実効振幅

$$\frac{g^2}{M^2}\bar{v}(p_2)\not{k}_2(1-\gamma_5)\frac{\not{p}_1-\not{k}_1}{(p_1-k_1)^2}\not{k}_1(1-\gamma_5)u(p_1) \tag{12.39}$$

が得られるが，Dirac 方程式 $\not{p}_1 u(p_1)=0$，$p_1^2=0$ を用いるとこの振幅は

$$-\frac{g^2}{M^2}\bar{v}(p_2)\not{k}_2(1-\gamma_5)u(p_1) \tag{12.40}$$

に帰着する．縦偏極状態の ε は因子 M^{-2} を持ちこみ，これは因子 $\not{k}_2$ によって“補償”されるが，エネルギーとともに増加するのはまさにこの因子 $\not{k}_2$ なのである．縦偏極状態は，実質的に，再び次元を持つ結合定数 g/M を持ちこんだこと

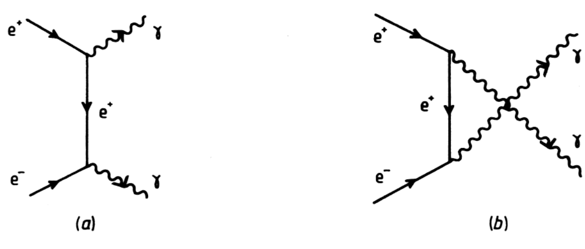


図 12.5　$e^+e^- \to \gamma\gamma$ の最低次の振幅（a）直接図形（b）交差図形

になる．

気落ちしながらももうひとたび，信ずるに足る指針 QED に立ち戻ってみよう．類似の電磁過程は $e^+e^- \to \gamma\gamma$ である．QED では最低次で 2 つの図形が寄与をする．（図 6.13 (*a*)，(*b*) の交差図形）これらは図 12.5 (*a*)，(*b*) に示してあるが，ひとつではなく 2 つの図形があることは意味深長である．12. 4 節でそれがあきらかになる．しばらくの間，図 12.5 (*a*) を集中的に見てゆこう．これは $\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$ 反応の図形と直接対応する．この図形が表す振幅は式(7.17)とほとんど同じで，ただ $(1-\gamma_5)/2$ を 1 で，$g/\sqrt{2}$ を e で置き換え，ε ベクトルを光子のものと思えばよい．

$$M_{\lambda_1\lambda_2} = e^2 \varepsilon_\mu^*(k_2,\ \lambda_2)\varepsilon_\nu^*(k_1,\ \lambda_1)\,\bar{v}(p_2)\gamma^\mu \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_e}{(p_1-k_1)^2 - m_e^2}\gamma^\nu u(p_1) \tag{12.41}$$

断面積を計算するとき光子の偏極状態について足し合わせる必要がある．質量を持つスピン 1 の粒子に対しては

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu^*(k,\lambda) = -g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/M^2 \tag{12.21}$$

を用いたが，質量のない光子に対してもこの結果に対応するものがいる．これはけっして自明ではない．この式で $M\to 0$ の極限をとっても発散するから答えにはならない．しかし，発散する項 $k_\mu k_\nu/M^2$ はすべて縦偏極の偏極ベクトルから生ずるものであり，5.1 節で学んだように，実光子には縦偏極の状態はまったく存在しないのである．したがって，中間ベクトルボソンのモデルが高エネルギー領域で“悪い”挙動をする原因は縦偏極の W 粒子であったから，QED が高エネルギー領域で“良い”挙動をするのは，光子に縦偏極の状態が欠けているからであろう，と推測することができよう．この事情は，連鎖をたぐれば，(5.1 節参照) QED のゲージ不変性にまで追いつめてゆくことができる．

ここで本当にわれわれが必要とするものは，W 粒子がゲージ量子になっている弱い相互作用のゲージ理論である，という重要な理論的指示に到達した．しかしそれは一風変わった型のゲージ理論であるにちがいない．本書のはじめに強調したように，ゲージ諸理論の量子の質量は光子やグルーオンのようにゼロであるが，W 粒子はそうでないからである．次の章で，質量を持つベクトル量子のゲージ理論を生みだすすばらしい芸当を説明しよう．しかしその前に，弱い相互作用の現象論的モデルの持つもうひとつの病気（ユニタリティー病に関

連しているが）— くりこみ不能性について論じておく．

12.3　弱い相互作用のくりこみ不能性の問題

ユニタリティーの破れに関する今までの議論は，次のような反論を受ける．これはまったく摂動論の枠組みの中での議論にすぎない．実際，このタイプの理論ではある十分高いエネルギー領域で摂動論が成り立たなくなるはずだ，ということが示されただけである．本質的な理由は，摂動展開の有効パラメーターが $E\sqrt{G_F}$ になることである．高エネルギー領域では $E\sqrt{G_F}$ は大きくなるから，最低次の摂動論に基づいた議論は適切でない．反論はまさに当を得ている．そこで高エネルギー領域の挙動を，ユニタリティーよりはくりこみ可能性に結びつけて，反論を考え直してみよう．

QED のくりこみは 6.10 節で論じた．しかしそこでは，与えられた理論がくりこみ可能であるかどうか，判定する一般的基準は何も与えておかなかった．実際，ここにひとつ簡単な判定の基準がある．結合定数が質量の負の次元を持てば，理論はくりこみ可能ではない．結合定数が質量の正の次元を持てば，理論は QED よりも少数個の発散しか持たず，理論は“超くりこみ可能”と呼ばれる．結合定数が無次元であれば，さらに詳しく調べなければくりこみ可能であるかどうかわからない．弱い相互作用の 4 フェルミオン相互作用のモデルは第一の例である．どこでくりこみが不可能になるのか調べてみよう．

図 12.6 で表される 2 次の過程の振幅を考える．ここで考えている 4 フェルミオン相互作用のモデルでは，弾性散乱 $\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$ は G_F の 1 次では起こらないので，この図形が最低次の図形である．振幅は 2 つのフェルミオンの伝播関数を含む内部運動量の積分（式(6.190) を参照）で表される．k の大きい所でフェルミオンの伝播関数は k^{-2} ではなく k^{-1} のようにふるまうから，積分は

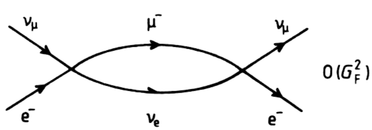


図 12.6　$\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$ の $G_F{}^2$ のけたの寄与

$$G_F^2 \int \frac{d^4k}{k^2} \tag{12.42}$$

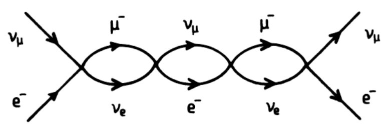
のようなふるまいを示し，あきらかに発散する（問題(6.13) 参照）．G_F^4 の次数では，図 12.7 に示すような図形を算入しなくてはならないが，最初の図形 (a) は

$$G_F^4 \left(\int \frac{d^4k}{k^2} \right)^3 \tag{12.43}$$

のように発散し，2 番目の図形（b）は

$$G_F^4 \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{k^6} \tag{12.44}$$

のように発散する．ここで k は k_1，k_2，k_3 のある 1 次関数である．式(6.192) のようにこれらの積分に切断（カット・オフ）運動量 Λ を導入すると，積分は Λ のある正冪で発散し，QED のように対数発散とはならないことはあきらかであろう．さらに具合の悪いことには，G_F^2 の次数が上がるにつれて発散の次数も高くなるのである．その物理的理由は，まさに G_F が質量の負の次元を持つことにある．新しい因子 G_F^2 がはいってくるごとに，振幅全体の次元を一定に保つために，次元 $[M]^4$ を持つ運動量の積分が補償因子としてはいってこなくてはならないからである．この補償因子は本質的に $(\int d_4k/k^2)^2$ であって，これがあるから，G_F^2 のある次数の振幅はそれ以下の次数の振幅よりもずっと強く発散す



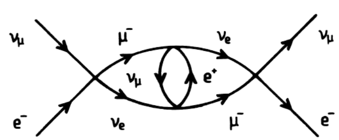


図 12.7 $\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$ の $G_F{}^4$ のけたの寄与

る．したがって摂動の次数が上がるたびに，発散の程度も強くなる．一方QEDの場合は，結合定数が無次元であるから，運動量積分は対数発散の程度に止まる．QEDの場合は，すべての発散を有限個のパラメーターで押えることができた．4フェルミオン相互作用では，摂動論の各次数で新しい発散が現れることを見込むと，無限個数のパラメーターを必要とすることになろう．

これは4フェルミオン・モデルを不可とする立派な理由である．それでは中間ベクトルボソンのモデルは少しはましなふるまいをするであろうか．この場合，QEDと同じく結合定数は無次元であるが，"無次元"だけでは不十分である．実は，中間ベクトルボソンのモデルはくりこみ可能ではないことがわかっている．今までの議論から，いろいろなモデルや理論の高エネルギー領域でのふるまいに発散の鍵があることはほぼあきらかであろう．高エネルギー領域は

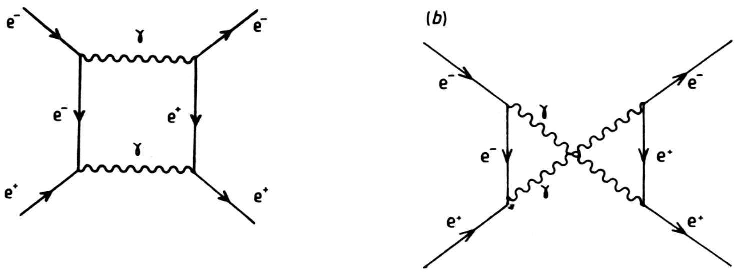


図 12.8　$e^+e^-\to e^+e^-$ の e^4 のけたの寄与

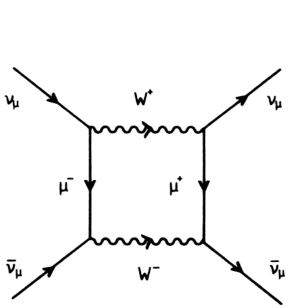


図 12.9　$\nu_\mu\bar{\nu}_\mu\to\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$ の g^4 のけたの寄与

積分の紫外発散がでてくる所である．たとえば図 12.8 および図 12.9 で表される 2 つの高次過程を考えてみよう．前者は 2γ の中間状態を経て散乱 $e^+e^-\to e^+e^-$ を起こす QED 過程であり，後者は中間ベクトルボソンで伝達される散乱過程 $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu\to\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$ である．この図形の形から，どちらの場合も，図 12.4 および図 12.5 の低次の図形を 2 つ“つなぎあわせて”得られるにちがいない，と考えるのはもっともである．今のところはさしあたりこの考察を受け入れることにすると，一方では $e^+e^-\to\gamma\gamma$ 過程，他方では $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu\to W^+W^-$ 過程の高エネルギー領域でのふるまいを比較することになる．これはまさに前節で行った比較であって今度はユニタリー性ではなく，くりこみ可能性の考察から同じ問題に到達したわけである．

実際，12.2 節において，振幅 $\nu\bar{\nu}\to W^+W^-$ (図 12.4) は高エネルギー領域で E^2 のように増加するが，これは縦偏極ベクトルの k 依存性によるもので，図 12.9 のような図形を通じてくりこみ不能な発散を生み出すことを見た．したがって，中間ベクトルボソン理論も，この点に関しては 4 フェルミオンのモデルに勝る所はない．それでは QED はどう生き伸びる工夫をしたか．この場合は，12.2 節で指摘したように，図 12.4 に対応する図形が2つ，図 12.5 (a)，(b) のようにあるのである．したがって，図 12.4 についてわれわれが行った計算を，図 12.5 (a)，(b) の場合にまねるとしてみよう．高エネルギー領域の主要なふるまいは，光子の偏極ベクトルの対応する運動量で置き換えることで得られ，(どちらの光子についても) この置き換えを行うと，図 12.5 (a)，(b) の振幅の和 (完全振幅) は消えてしまうことが検証できる (問題 12.4)．もちろん，物理的にはこの結果は予期されていた．この検証に先立って，実光子の偏極ベクトルは常に横偏極だけにとれる (5.1 節参照) ことがわかっており，したがって物理的な過程は k_μ に比例する ε_μ の部分によるはずはないからである．しかしながら，計算は図 12.8 をくりこむという問題に大きく関連している．この過程の光子は実の外線粒子ではなく，仮想的な内線粒子である．その結果 (のちの 15.1 節でさらに詳しく説明するが)，図 12.8 に対しては一般に光子の縦状態 ($\varepsilon_\mu\propto k_\mu$) も取り入れなくてはならない．問題 12.4 の計算は，図 12.8 の寄与を2つとも取り入れる限り，実はこれら縦偏極の状態は無害であることを示唆している．

実際，これら 2 つの寄与の和は発散しない．もし発散するならば，4 点の頂

点相互作用 $e^+e^- \to e^+e^-$ (図 12.10) に比例する無限個の補正項が導入されなくてはならず，もちろんこのような基本相互作用をもたないもとの QED はくりこみ不能になるであろう．これが図 12.9 の場合に現に起こっていることである．$\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$ 過程の高エネルギー領域での悪いふるまいは，図 12.9 の発散に翻訳され，今度はその発散を打ち消す“交差”振幅が存在しない．この発散は，もとの中間ベクトルボソン理論には存在しない図 12.11 の新しい頂点を導入することを，余儀なくさせる．したがって新しい頂点なしの理論はくりこみ不能であり，たとえそれを含めたにしても，4 フェルミオン場の点相互作用は，Fermi 理論の場合と同じく無限に多数のパラメーターを生ずる苦境に陥るのである．

今までの論述では，QED においては具合の悪い高エネルギー領域のふるまいは，図 12.5 (*a*)，(*b*) (あるいは図 12.8 (*a*)，(*b*)) からの寄与による打ち消しによって無害になったことを強調してきた．中間ベクトルボソン理論を“改修する”ひとつの方法は，新しい物理的な過程を図 12.4 に加えて，高エネルギー領域で相殺がおきるようにすることかもしれない．このような高エネルギー領域の相殺機構を探し出すことは，十分な発明の才といささか議論の余地は残るがちょっとした“あと知恵”がありさえすれば，成功の域に達したかも知れない可能性がある．しかし，われわれはより強力な原理を持っているのである．QED

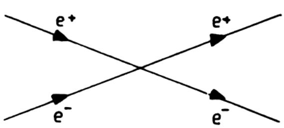


図 12.10　e^+e^- の 4 枝頂点

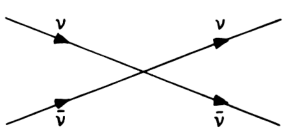


図 12.11　$\nu\bar{\nu}$ の 4 枝頂点

では，ボソンについても（式(5.203) 参照）フェルミオンについても（問題 6.10 参照），ε_μ を対応する k_μ で置き換えると振幅がゼロになることは，ゲージ不変性によることを知っている．換言すれば，害をなすかもしれない縦偏極の状態は，ゲージ不変な理論では実際には無害なのである．今やこの手がかりを追求するときが来ている．

まとめ

(1) 4 フェルミオン相互作用は高エネルギー領域でユニタリティーをこわす．

(2) 中間ベクトルボソンのモデルの Born 図形は，外線の W 粒子を含む高エネルギー過程でユニタリティーをこわす．

(3) 高エネルギー領域の振幅がユニタリティーの制限を超えて増大するのは，縦偏極の状態のせいである．

(4) 物理的光子に対するゲージ不変性は，縦光子の状態を消去する．したがって QED はユニタリティーを破らない．

(5) 高エネルギー領域のふるまいが悪いことは，くりこみ不能性と結びついている．

(6) QED の図形は，相殺によって高エネルギー領域でもっともなふるまいを示し，理論はくりこみ可能である．

(7) くりこみ可能なベクトル粒子の理論をたてるにあたって，ゲージ不変性は基本的な手がかりとなる．

問題

12.1 (a) 式(10.74) で導入された $\boldsymbol{\alpha}$，β，γ_5 の表示を用いると，質量を持たない粒子は

$$u=E^{1/2}\begin{pmatrix}\phi_+\\ \phi_-\end{pmatrix}\qquad (u^\dagger u=2E \text{ と規格化する})$$

の形のスピノールで記述される．ここで $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\phi_\pm=\pm\phi_\pm$，$\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ である．$\hat{\boldsymbol{p}}=(\sin\theta,0,\cos\theta)$ のとき u のあからさまな形を求めよ．

(b) 12.1 節で論じた過程 $\bar{\nu}_\mu+\mu^-\to\bar{\nu}_e+e^-$ を，すべての質量を省略する近似

で考える．3.4 節で論じた反粒子の規則に従って，この過程の振幅は

$$G_F \bar{v}(\bar{\nu}_\mu,\ R)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\mu^-,\ L)\bar{u}(e^-,\ L)\gamma^\mu(1-\gamma_5)v(\bar{\nu}_e,\ R)$$

に比例する．ここにしかるべきヘリシティーR，L をあからさまに示しておいた．(10.4 節で説明したように，$(1-\gamma_5)/2$ は右回りの反ニュートリノに対する射影演算子である．) 重心系において，はじめの μ^- の 3 元運動量を $(0,\ 0,\ E)$，終わりの e^- の 3 元運動量を $(E\sin\theta,\ 0,\ E\cos\theta)$ とする．振幅は $G_F E^2(1+\cos\theta)$ に比例することを示せ．(ヒント："やさしい"部分 $\bar{v}(\bar{\nu}_\mu)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\mu^-)$ をまず計算せよ．その結果，$\mu=0,3$ の成分は 0 になることがわかる．したがってスカラー積の中の $\mu=1,2$ 成分だけを計算すればよい．)

12.2　式(12.36) を証明せよ．

12.3　あからさまな形式 (12.32)，(12.33) を用いて偏極ベクトルの和(12.21) を証明せよ．

12.4　図 12.5 (a)，(b) の振幅の和の高エネルギー領域での主要部を求め，それがゼロになることを示せ．

第 5 部　電弱相互作用の理論

“共和国”の第7巻において，Plato は洞窟の中に鎖でつながれ，外界は壁の上に落ちる影でしか知り得ない囚人たちのことを記している．洞窟から解放されるとまず眼がくらみ，しばらくの間は洞窟の中で見た影のほうが現実に今見ているものより真実らしいと感ずる．しかしついには視力が回復し，いかに真実の世界が美しいかわかるようになる．われわれのできる範囲の実験の壁に阻まれて，われわれは洞窟の中にいるようなものである．特に，物質は比較的低い温度でしか研究できない．そこでは対称性はおそらく自発的に破れていて，自然は極めて簡単かつ統一的というようには見えない．われわれはまだ洞窟から出ることができないが，壁にうつる影を熱心に長く観察することによって，破れてはいるがすべての現象を支配している正確な原理，外の世界の美しさを告げる対称性の形を，少なくとも判別することはできるのである．

Weinberg, 1980

第13章　隠れたゲージ不変性，U(1)対称性の場合

1960年か1961年初めのある時，以前固体物理学に端を発し，その後 Heisenberg，Nambu, Goldstone のように両分野で業績をあげた人達によって粒子物理学に持ち込まれたある着想を私は知るに至った．これが“破れた対称性”の考えであった．ハミルトニアンと量子論の交換関係は正確な対称性を保ちながら，物理的状態は必ずしも対称性の整然とした表現になっていない，というのである．特に，ハミルトニアンの対称性は真空の対称性ではないことがある．

理論家がよくやることだが，私はこの考えにまったく魅了されてしまった．こんなときたびたび起こるように，はじめ私はその含意がわからず混乱していた．

Weinberg，1980

13.1　はじめに

もっともなじみ深いゲージ理論 QED では，ゲージ不変性あるいは局所的位相不変性は，質量を持たないゲージ場すなわち光子場 A^μ に関係している．第9章では QCD のゲージ量子（グルーオン）も質量を持たないと容認した．質量を持たないということは，すべてのゲージ場に必要な特徴であろうか．簡単な発見法的議論（あとからふりかえって見ているので簡単すぎるが）によれば，どうもそうらしいのである．思い出してみると，ゲージ場を導入することは，与えられた電荷を持つすべての粒子の波動関数の位相を，時空間のすべての点で独立に変化させても観測にかかる変化は現れてこない，ということである．この意味では，ゲージ場の原理的な役割は，空間中で遠く隔たっている粒子の位

相変化を“調整し直す”ことである．しかしゲージ場は量子力学の方程式に力の場（あるいはポテンシャル）として入ってくるのであり，力の場の量子の質量とその力の到達距離の間にはふつう一般的な関係があることはよく知られている．ゲージ場の場合には，場はその“調整能力”を任意の時空距離にわたって発揮することができなくてはならないから，ゲージ場に関連した力は無限大の到達距離を持つであろう，と解釈せざるを得ない．したがってこの議論は，ゲージ量子は質量を持たないことを要請しているように思われる．

ゲージ不変性がゲージ量子のゼロ質量の性質と一見厳密に結ばれていることは，数学的には次のようなことである．電磁ポテンシャルは Maxwell の方程式

$$\Box A^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})=j^{\nu} \tag{13.1}$$

を満たす．これは2.3節で論じたようにゲージ変換

$$A^{\mu}\rightarrow A'^{\mu}=A^{\mu}-\partial^{\mu}\chi \tag{13.2}$$

のもとで不変である．しかし，もし A^{μ} が質量を持つ場であるならば，その波動方程式は（式(10.17) 参照）

$$(\Box+M^{2})A^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})=j^{\nu} \tag{13.3}$$

になる．この方程式は変換(13.2)のもとであきらかに不変ではない．ゲージ不変性を破るのはまさに質量項 $M^{2}A^{\nu}$ なのである．式(13.1) と (13.3) の非 Abel 的（非可換的）類推についても同じ理由が成り立つ．

ここでゲージ原理を弱い相互作用に適用しようとするとき，いつも出会う難点にぶつかったようである．弱い相互作用では，力の到達距離はきわめて短く，それに関連するベクトルボソンの質量はきわめて大きい．一方，第12章の終わりで強く暗示されたように，ベクトル量子を含む理論では，ゲージ不変性はくりこみ可能性を保証するために本質的な役割を果たしているようであった．質量を持つベクトル量子の場合も，なんらかのゲージ不変性を要求することが，どうしても必要に思われるのである．

まことに注目すべきことには，いま質量項はゲージ不変にならないという議論を展開したにもかかわらず，ゲージ量子が質量を獲得することが可能なのである．ゲージ不変性は失われたのではなく，単に隠されているのにすぎない．ゲージ不変性は，質量と結合定数の間の特別な関係を通じて確認することができる．これが“隠れたゲージ不変性”と呼ばれるようになったのは，まさにこ

のためである．ゲージ原理が短い到達距離の弱い力を生み出すことを察知するためには，この隠れた対称性がどうして出てくるのか，それを理解することが絶対に必要である．

非可換(非 Abel 的)の場合は代数的にかなり面倒であるから，それを避けてこの章では，可換（Abel 的）の場合（例えば電磁場）の隠れたゲージ不変性について，その概念と物理を論じよう．その後，第 14 章で(非可換的な)GSW 理論という特殊な場合に拡張する．

電磁的ゲージ不変性は光子の質量がゼロになることを要求する，という当時ひろくゆきわたっていた見解に，初めて真剣に挑戦したのは Schwinger(1962)であった．その直後に Anderson (1963) は，固体物理のいくつかの現象は，実効的な質量を持つ電磁場という考えで解釈できることを指摘した．彼はゲージボソンが質量を獲得する現象を扱う一般的な枠組みをほぼ作り上げ，当時新たに発見されたベクトル中間子（ρ，ω，ϕ など）を，ハドロンのフレイバー対称性を局所的に拡張するときのゲージ量子と関連づけるという新しい解釈(桜井，1960)と何らかの関係があるかもしれない，と論じた．その論旨から，Anderson はゲージ原理をハドロンに適用することに疑問を感じていたのはあきらかであるが，彼自身注意しているように，それはゲージボソンは対称性が隠されているときに限って質量を獲得するからであった．第 14 章で論ずるように，隠れた対称性の結果として，非可換対称性から予期される普通の多重子構造が，一般に失われてしまうのである．一方，フレイバー対称性は，たとえ正確でなくても，たしかに認め得る近似的な縮退した多重子構造を明白に与えているのである．Weinberg（1967）と Salam（1968）に従って，ゲージ原理を素粒子物理に応用する真髄は，弱い力に関連するゲージ量子に質量を作り出すことにほかならない，と今日では考えられている．しかし，Anderson が示したように，このことは基礎的なメカニズムの物理が相対論的である，ということにあるのではない．そこで，はじめに少し寄り道をして，このメカニズムが原子物理や固体物理でどう働くか，あからさまな実例を考察しておこう．ここでの扱い方は Anderson の方法に示唆を受けたもので，実際その拡張になっている．

13.2 遮へいカレントと“光子質量”の創出

質量を持つ自由なベクトル場

$$(\Box+M^2)W^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}W^{\mu})=0 \tag{13.4}$$

を考えよう．この式の発散をとれば

$$\partial_{\mu}W^{\mu}=0 \tag{13.5}$$

が導かれるので，式(13.4) を

$$(\Box+M^2)W^{\nu}=0 \tag{13.6}$$

と書くことができる．ここで解決しようという問題は次のように述べられる．Maxwell 方程式

$$\Box A^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})=j^{\nu} \tag{13.7}$$

を満たす電磁場 A^{μ} が，また“質量を持つベクトル場”の形の方程式

$$(\Box+M^2)A^{\nu}=0 \tag{13.8}$$

を満たすことができるであろうか．

以下の議論の大半では，定常電流と静磁場に関連した現象を考え，すべての時間微分を 0 とすることにしよう．ゲージ条件 $\mathrm{div}A=0$ をとれば，Maxwell 方程式は

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{j} \tag{13.9}$$

となる．一方，式(13.8) の静的な表現（空間部分）は

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=M^2\boldsymbol{A} \tag{13.10}$$

である．式 (13.8)，(13.9) が矛盾しないための唯一の可能性は，$\boldsymbol{j}$ が $\boldsymbol{A}$ 自身に比例する部分を含むことである．

$$\boxed{\boldsymbol{j}=-M^2\boldsymbol{A}}\quad \text{遮へいカレントの条件} \tag{13.11}$$

関係式(13.11)，あるいはその 4 次元的拡張は，Anderson によって，ゲージ不変性と質量とのあらゆる問題にとって基本的である，と強調された．もちろん，その形からわかるように，式(13.11)はあきらかにゲージ不変ではない．はじめに，このような方程式が表れてくる可能性があるいろいろな場合を考察しよう．この議論は特別なゲージをとる含みで行わざるを得ない．最後に，ゲージの選択は結果としてけっして問題を制限しているのではないことを示す．ほかの

ゲージのとり方も含めて，どのようなゲージ不変性が“隠され”ているのか説明しよう．

式(13.11) をなぜ“遮へいカレント”の条件と名づけたのであろうか．静的な場の Maxwell 方程式

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j} \tag{13.12}$$

と，条件(13.11) および $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ より，式(13.12) の回転をとれば

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=M^2\boldsymbol{B} \tag{13.13}$$

を得る．ここで $\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$ であることを用いた．式(13.13)はもちろん，式(13.10)の回転からただちに導かれたであろう．しかし，いまは Maxwell の方程式と条件(13.11) だけから議論をしてゆこうというのである．式(13.13) で記述される磁場 $\boldsymbol{B}$ の変化はきわめて特徴的であって，固体物理ではいろいろな関連において現れる．簡単にするために 1 次元の場合を考えると

$$\mathrm{d}^2\boldsymbol{B}/\mathrm{d}x^2=M^2\boldsymbol{B} \tag{13.14}$$

と書け，$x\geqq 0$ の半平面において解

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\exp(-Mx) \tag{13.15}$$

を持つ．$\boldsymbol{B}_0$ はある定ベクトルである．場は，$x\geqslant 0$ の領域に M^{-1} の程度の距離だけ貫入する．距離のパラメーター M^{-1} を，固体物理では遮へい距離という．これは，条件(13.11)の成立するような媒質の中では，場は自由空間から媒質の中に M^{-1} の程度の距離しか侵入できないことを示す．場は長い距離に対しては“遮へい”されてしまうのである．

この遮へいの効果の物理的な起源はなんであろうか．磁場に対しては Lenz の法則が答えてくれる．磁場が荷電粒子系に働くと，誘導起電力が生じて粒子を加速する．この電流から生ずる磁場は，はじめの磁場を打ち消す（遮へい）ように働く．原子尺度では，これは原子の反磁性の起源である．巨視的尺度では，素粒子の物理におおいに関連することであるが，超伝導体の中に磁束ははいらないということを表す．

このような挙動の簡単なモデルを考察する前に，この問題の 2 つの側面を区別しておくと役に立つであろう．式(13.13)で表される典型的な遮へい状況の場合では，$\boldsymbol{B}$ は“質量を持つ”けれども依然横波（$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$）である．同様に式(13.9)，(13.10)，(13.11) も横波の $\boldsymbol{A}$ に対して成り立つ．したがって問題の第

1の部分は，ゲージ場の横波成分だけについて質量の起源を理解することであり，しかもそれを遮へいという概念に訴えて行うことである．しかしすでに12.2節で質量を持つベクトル粒子には3つの独立な偏極状態があるが，5.1節では質量を持たないベクトル場は独立した偏極状態を2つしか持てないことを学んでいる．さらに式(12.33)から，$M \neq 0$の場合の“余分な”偏極状態は，$M \to 0$にしてもすなおに消えてくれないことはあきらかである．質量がある場合とない場合は滑らかにつながってはいない．自由度の数の不連続的な変化がどこかで生ずるのである．したがって問題の第2の側面は，どこから別の自由度が出てくるのか，どのようにして質量を持つ縦波の成分がベクトル場につけ加わるのか，そうなってもなおゲージ不変性をなんとか維持してゆけるのか，その事情を理解することにある．素粒子物理への最終的応用は，超伝導との直接の類推を通じて行う．このとき，問題の2つの側面は，ともに多粒子基底状態の非凡な性質に結びつくことがあとでわかる．巨視的な電子対の波動関数を導入するが，その振幅の2乗（電子密度に関係する）は一定となって横波の遮へい効果を説明し，その位相が失われた“第3”の自由度を表す．素粒子の物理では，電子対の波動関数の役割はいわゆるHiggs場が果たし，その波動関数は物理的真空の“超伝導”効果を引き起こすのである．

まず，磁気遮へいの特定の実例を論じてみよう．

13.2.1　1粒子問題，原子の反磁性

電荷qを持つ非相対論的粒子の電磁カレントを考えよう．自由粒子に対しては，標準的な量子力学の表式から

$$\boldsymbol{j}=(q/2m)[\psi^*(-\mathrm{i}\nabla\psi)+\psi(\mathrm{i}\nabla\psi^*)] \tag{13.16}$$

である．しかしこれは局所的位相変換

$$\psi \to \psi' = \exp[\mathrm{i}q\chi(x)]\psi \tag{13.17}$$

に対して不変でないから，ゲージ不変ではない．実際，波動関数を

$$\psi = |\psi| \exp(\mathrm{i}\theta) \tag{13.18}$$

と書き，$|\psi|$，θを座標xと時間tの実関数とすれば，カレントは

$$\boldsymbol{j}=(q/m)|\psi|^2(\nabla\theta) \tag{13.19}$$

となる．位相θが局所的に変化すれば，カレント$\boldsymbol{j}$も変わることはあきらかである．もちろん，$\boldsymbol{j}$をゲージ不変にする方法は既知であって，式(13.16)の中の

∇ を $\boldsymbol{D}=\nabla-\mathrm{i}q\boldsymbol{A}$ に置き換えればよい．このとき，式(13.18) を用いて

$$\boldsymbol{j}=(q/m)|\psi|^2(\nabla\theta-q\boldsymbol{A}) \tag{13.20}$$

が成り立ち，きわめて明瞭に，$\boldsymbol{A}$ の変化

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi \tag{13.21}$$

が θ の変化

$$\theta\to\theta'=\theta+q\chi \tag{13.22}$$

によって相殺されていることがわかる．式(13.20) は，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で与えられる電磁場に電荷 q の荷電粒子が存在するとき，その確率の流れの密度（に電荷 q を乗じたもの）である．

さて解くべき方程式は連立方程式

$$-(1/2m)(\nabla-q\boldsymbol{A})^2\psi=E\psi \tag{13.23}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{j} \tag{13.9}$$

であって，$\boldsymbol{j}$ は式(13.20)で与えられる．特に時間によらない(静的な)場でゲージ条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ が成り立つ場合に問題を限った．一般にこれは複雑な問題であるが，弱い場の近似をとり，ψ が $\boldsymbol{A}$ によって乱されないとしてある見通しをつけることができる．式(13.20)の中の $\nabla\theta$ 項は m_l に比例する寄与を与える．ただし m_l は軌道角運動量の z 成分 L_z の固有値である．これは（無摂動系の）波動関数の位相が $\exp(\mathrm{i}m_l\phi)$ で与えられるからである．これは常磁性への軌道運動の普通の寄与である．反磁性遮へいカレントは式(13.20) の第2項

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{sc}}=(-q^2/m)|\psi|^2\boldsymbol{A} \tag{13.24}$$

と関係をつけることができよう．方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{j} \tag{13.9}$$

に代入すると，このカレントは

$$\lambda\sim(m/|\psi|^2q^2)^{1/2} \tag{13.25}$$

で与えられる遮へいの長さを持つ．ただし大きさのけたの評価として，$|\psi|^2$ を適当な一定の平均値で置き換えた．a_0 を Bohr 半径として

$$|\psi|^2\sim(a_0)^{-3} \tag{13.26}$$

のようにとれば，m，q を電子の質量，電荷として

$$\lambda\sim300\ \text{Å} \tag{13.27}$$

の値を得る．したがって原子中の電子による反磁性遮へいはきわめてわずかで

ある．すなわち $\boldsymbol{A}$ はほとんど変わることなく侵入してゆく．

式(13.24)，(13.9)は形のうえでもゲージに依存することに注意をうながしたい．この段階では，横波の遮へいという特徴ある現象が起こり得る状況を，特定なゲージを選んで調べているのにすぎない．のちに，異なるゲージ，場の縦波成分，およびゲージ不変性の問題を順次とり上げることにする．

13.2.2 多粒子問題，超伝導の巨視的遮へい効果†

1 原子の反磁性遮へい効果は，λ が原子の半径に比べて非常に大きいから，弱い効果である．金属の伝導帯にある電子の軌道は大きな範囲に広がっているが，その波動関数は一般に磁場によって強く乱されており，無摂動系の波動関数を用いる近似はまったく不適当になるかもしれない．伝導電子の反磁性は Landau によって初めて計算されたが，きわめて弱い効果であり，Pauli のスピン常磁性よりも小さい．(この状況は不純物半導体では反対になる．)

しかし，なんらかの理由によって系が

(a) 空間的広がりは巨視的で

(b) 磁場によって実効的に乱されていない

波動関数によって記述されるならば，λ が依然として巨視的であるかぎり，反磁性遮へい効果はきわめて劇的に作用する．実際，$\boldsymbol{B}$ は厚さ λ 程度の薄い表面層を除いて，系からまったく排除されてしまうのである．これがまさに超伝導体に見られる現象であって，Meissner 効果と呼ばれている．通常の金属を外磁場の中に置き，超伝導の転移温度以下に冷却すると，磁束は急に弾き出されてしまう．物理的に言えば，超伝導体への転移は，何か(抵抗がゼロであるような)表面電流が生じて，超伝導体の内部では外磁場の磁束を正確に打ち消してしまう(“完全に遮へい”すると言ってもよい)磁束を作るはずである．

このような遮へいが単一電子の波動関数に起こり得ることはすでに見た．もし同じ考えが超伝導体にも適用できるならば，遮へいカレント

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{sc}}=(-q^2/m)|\psi|^2\boldsymbol{A} \tag{13.24}$$

に関連した波動関数は何か巨視的な多体波動関数でなくてはならない．磁束の

†(原注) Schrieffer (1964) は特に有用な文献である．

排除は巨視的現象として起こり，電荷の担体を巨視的な数で含むからである．さらに，巨視的な波動関数は磁場によって現実には変わらないこと，あるいはよく言われるように，“強い”† ことを仮定しなくてはならない．

この第2の点についてはこれ以上論じない．ただ，単に役に立つ仮説として受け入れておこう．多粒子系を記述するただひとつの巨視的波動関数という考え方の解釈に，より関心があるからである．まず ψ を巨視的な範囲 L にわたって広がる1粒子波動関数とするならば，規格化の条件から $|\psi|^2 \sim L^{-3}$ となり，式(13.25) の λ はきわめて大きくなることがわかる．しかし，もし ψ が全粒子数 N について規格化されていれば，$|\psi|^2 \sim NL^{-3} \sim a_0{}^{-3}$ となり，式(13.26)，(13.27) が回復されて $\lambda \ll L$ となる．粒子数が非常に大きく，波動関数 ψ で記述されるどの粒子もすべて同じ状態にあれば，このような規格化が可能である．このとき $|\psi|^2$ は粒子数の密度である．

このような場合，ψ は古典場のようにふるまう．なじみ深い実例は，量子化されていない電磁場 $A^\mu(x)$ 自身である．この場は，非常に多数の光子がすべて同じ状態に存在するときの量子化された場の極限として得られる．特にたいせつな点は，個々の粒子の波動関数がすべて同じ位相を持つことである．すなわち光子はコヒーレント（可干渉的）でなくてはならない．超伝導体の場合は，ψ はすべての電子の一種のコヒーレント状態を表す．

光子はボソンである．Bose-Einstein の統計は，任意多数の光子が同じ量子状態を占めることを許す．しかし電子はフェルミオンであって，排他原理は1個以上のフェルミオンが所与の量子状態を占めることを禁止する．したがって，超伝導体では，いかなるタイプの巨視的波動関数も不可能であるように思われる．Cooper (1956) の画期的な議論によれば，ほかの電子が作る不動の Fermi 面より高い状態に2つの電子があり，その間に引力が働けば，その力の大きさ††

† (原注) この性質は電子のスペクトルにエネルギー間隔があることと結びつけられる．Feynman (1972) の p. 268 参照．

†† (原注) ちょっと考えると2つの電子間に引力が働くとは驚くべきことである．実は，金属中の電子と格子イオンとの間の力は引力の相互作用を与え，ある状況のもとでは2つの電子間の Coulomb 斥力より大きくなるのである．

いかんにかかわらず，電子は束縛状態を作る．この電子系は実効的に Bose 粒子 (Cooper 対という)の集まりとみなすことができ，単一量子状態を巨視的に占めることができるのである．この状態では，すべての対は，同じ運動量（重心系で）を持ち，本質的にコヒーレントな性質を示す．

多粒子系の巨視的な数の粒子がすべて同じ状態にあるとき，“凝縮”が起こったという．相互作用をしていない同種のヘリウム原子の多体系に起こる Bose-Einstein 凝縮は，液体ヘリウム 4 の超流動を説明する重要な鍵である．同様に超伝導体では，電子対の巨視的な一部が凝縮系を形成すると考えられている．電子対同士の残留相互作用によって，真の基底状態では電子の一部は凝縮系から励起されているであろうが，なお巨視的な比率 $n_s(T)/n$ の電子が残っていて減衰しない電流を運び，これが Meissner 効果の原因になっている．超伝導電子の密度 n_s は，記号の示すように絶対温度 T の関数であって，T が超伝導状態の転移温度 T_c に下から近づくにしたがってゼロになる．T が T_c にずっと下から近づけば n_s は，n に近迫する．n は伝導帯の電子密度である．T_c 以下の温度で基底状態は，すべての超伝導電子対のコヒーレントなプラズマであり，

$$|\psi|^2 = n_c = n_s/2 \tag{13.28}$$

のように規格化された巨視的波動関数 ψ で記述される．

ここで，超伝導基底状態を正しく記述することは，正規の（対を作らない電子の）基底状態を用いた標準的な多体摂動論ではできない，ということを強調しておこう．超伝導でも，素粒子物理におけるその類推でも，真の基底状態が非摂動的な性格を持つということは，決定的に重要な特徴なのである．光子がある媒質の中ではあたかも質量を持つ粒子であるかのように伝播する，ということは非摂動的効果であって，摂動論では説明できない．数学的には，質量を持たないという定性的な議論の中で落とし穴になっているのである．

遮へいカレント

$$\boldsymbol{j}_{sc} = (-q^2/m)|\psi|^2\boldsymbol{A} \tag{13.24}$$

の表式に戻ろう．ψ は今や巨視的な対の波動関数であり，q は Cooper 対の電荷 $-2e$，m はその質量 $2m_e$ である．$|\psi|^2 = n_s/2$ とおき，この式の回転をとれば

$$\nabla \times \boldsymbol{j}_{sc} = \frac{-q^2}{m}\frac{n_s}{2}\boldsymbol{B} \tag{13.29}$$

を得る．これはLondonの方程式（たとえばLondon（1950）参照）として知られている．静的な場で成り立つAmpéreの法則

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j} \tag{13.12}$$

はMaxwellの方程式にほかならないが，この2つの式より

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=\frac{q^2}{m}\frac{n_s}{2}\boldsymbol{B} \tag{13.30}$$

を得て，遮へいの長さ，あるいは磁束の侵入の深さλは

$$\lambda=(2m/q^2n_s)^{1/2} \tag{13.31}$$

のようにきまる．$m=2m_e$，$q=-2e$，$n_s\sim4\times10^{28}m^{-3}$（1原子につき1伝導電子）とおけば$\lambda\sim10^{-6}$ cmである．これは遮へいカレントが流れる表面層の厚さ，それを超えると磁束がゼロになる距離のけたを与える．TがT_cに近づけばn_sがゼロに近迫するから，λはきわめて大きくなり，磁束の排除は起こらない．

質量を持つ静的なベクトル場の方程式は

$$\nabla^2\boldsymbol{W}=M^2\boldsymbol{W} \tag{13.32}$$

であるから，式(13.30)は質量

$$M=(q^2n_s/2m)^{1/2} \tag{13.33}$$

を持つ静的なベクトル場を表すと言ってよい．このようにして超伝導体は，ゲージ場がげんに質量を獲得するという現象の物理的な作業モデルになっていると考えられる．しかしながら，この現象の基本的な一面が今までの議論では抜けている．それは質量を持つベクトル場の“第3”成分の問題である．これまで一貫して$\boldsymbol{A}$（または$\boldsymbol{B}$）の場の横波成分に議論を限ってきた．そもそもの初めに指摘しておいたとおり，質量を持つベクトル場は本来は3つの偏極状態を持ち，それぞれの自由度は同じ質量に関連している．場の縦波成分には何が起こったのであろうか．答えはゲージ不変の問題と密接に関係している．超伝導体の議論では，巨視的な波動関数はベクトル・ポテンシャル$\boldsymbol{A}$の摂動に対して“強い”と仮定した．しかしこれは$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$というゲージの選択，すなわち横波のベクトル・ポテンシャルについての条件であった．遮へいの式(13.24)はまさに$\boldsymbol{A}$の横波部分にだけあてはまる，と考えなくてはならない．巨視的な波動関数が縦波の摂動に対して強くなり得ないことは，$\boldsymbol{A}$が純粋に（スカラー関数の）勾配である場合を考えれば，ただちに見てとれる．これに相当する物理的な電

磁場はないからである．$\boldsymbol{B}$ はもちろんゼロとなり，全電流もゼロにならなくてはならない．したがって前に常磁性効果と呼んだものも，この場合は反磁性の遮へい効果(13.24)を完全に相殺しなければならない．実際，$\boldsymbol{A}$ の縦波部分は電子の縦波の励起と強く結合している．Bardeen (1957) が初めて指摘したように，電子系の集団運動の密度の動揺，すなわちプラズマ振動に主として結合しているのである．電子の力学のこの観点を取り入れると，$\boldsymbol{A}$ の実効質量が完全にゲージ不変な形で導かれる．（たとえば Schrieffer (1964) の 8.5 節を参照するとよい．）

超伝導の理論を詳しく議論することは当初の目的ではない[†]．ただ，本質的な物理的理念のいくつかを取り出してくることに専念しただけである．これはそのまま素粒子の物理へ書き換えることができるであろう．特に，ここでは超伝導体の縦波様式という興味ある問題をさらに追求することをさし控えた．ゲージ不変性は素粒子物理の視点から 13.4 節で取り扱おう．

13.2.3 “相対論的超伝導体”，Higgs 模型

これまでの議論では，静的な場と $\boldsymbol{A}$ の空間成分だけを考えてきた．これはともに，非共変的な制約であることはあきらかである．前述の理念を素粒子理論へ適用する前に，この制限をとり払っておかなくてはならない．超伝導に対して概説した手続きをできるだけまねしてみよう．Lorentz ゲージ $\partial_\mu A^\mu=0$ をとることとし，共変的な方程式

$$\Box A^\nu = j^\nu \tag{13.34}$$

から出発する．もし j^ν が A^ν に比例すれば，少なくともある近似において，これは質量を持つベクトルボソンの方程式である．荷電スカラー場（ある種の“対”の巨視的な波動関数に対応する）のカレントの共変的拡張は

$$j^\mu(\phi) = \mathrm{i}q[\phi^*(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi^*)\phi] - 2q^2A^\mu|\phi|^2 \tag{13.35}$$

である．これは普通の KG 粒子のカレント（式(3.20)をいつもの置き換え

[†]（原注）たとえば，$\boldsymbol{j}_{sc}$ と $\boldsymbol{A}$ の間の簡単な関係式 (13.24) は，現実の超伝導体については近似にすぎないことを注意しておこう．この式は，任意の点における $\boldsymbol{j}_{sc}$ は同じ点における $\boldsymbol{A}$ に比例し，したがってこの関係は局所的であることを述べている．一般に，$\boldsymbol{j}_{sc}$ は与えられた点のまわりの平均の $\boldsymbol{A}$ と関係しているのである．

$$\partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu \tag{13.36}$$

でゲージ不変にしたものである（式(4.196) 参照）．したがって A^ν の満たす方程式は

$$\Box A^\nu = \mathrm{i}q[\phi^*(\partial^\nu \phi) - (\partial^\nu \phi^*)\phi] - 2q^2 A^\nu |\phi|^2 \tag{13.37}$$

となる．さてここで，場の振幅の大きさが実効的に一定（式(13.28) 参照）であるような ϕ の配位を考えると，簡単な結果がでてくる．ϕ を実定数

$$\phi = \phi_0 \equiv f/2^{1/2} \tag{13.38}$$

とおけば，$j^\mu(\phi)$ は

$$j_0^\mu = -q^2 f^2 A^\mu \tag{13.39}$$

となり，A^ν の満たす方程式は

$$\Box A^\nu = -q^2 f^2 A^\nu \tag{13.40}$$

となる．これは質量 $M=qf$ を持つ自由なベクトル粒子の波動方程式である．この基本的な考察は，相対論的に，初めて Englert and Brout（1964），Higgs (1964)，Guralnik *et al*.（1964）が行った．詳しくは Higgs（1966）を見よ．

寛容な読者は，何かある種の“相対論的超伝導体”と素粒子物理の間にどんな関係があるのか，と訝るかもしれない．電磁的なゲージ場が，あたかも質量を持つかのようにふるまう物理系があるかもしれない，ということが判明したのであるが，いままでの議論では，たとえば凝縮した Cooper 対の場のように，ゲージ場のほかに何か余分の物質場がある，ということが決定的に重要だったのである．しかしこの考えを素粒子物理に持ち込むためには，弱い相互作用の量子は，自由粒子として真空と呼ぶにふさわしい媒質の中を飛んでいるときにも，質量を持っていると言いたいのである．どうしてこのようなことが可能になるのであろうか．本質的な見解は，真空それ自身がこれを可能ならしめるような特別な性質を持つと考えることである．すなわち，真空とはある量子場 — Higgs 場 ϕ — がゼロでない期待値

$$\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle \neq 0 \tag{13.41}$$

を持つ状態なのである．弱い力の場が存在すると，このようなゼロでない値は，ちょうど Cooper 対の場 ψ が現実の電磁的超伝導体に起こしたように，“弱い遮へいカレント”を起こすことができる．この特殊な背景媒質 — 真空 — を伝播する質量を持たない弱いゲージ量子は

$$\Box \widehat{W}^{\nu} = \widehat{j}^{\nu}_{\text{vac}} \tag{13.42}$$

の形の方程式を満たすであろう．ここに $\widehat{j}^{\nu}_{\text{vac}}$ は，$\widehat{\phi}$ の真空期待値がゼロでないことに起因して真空に定住する弱いカレントである．$\widehat{j}^{\nu}_{\text{vac}}$ を調整して $-M^2\widehat{W}^{\nu}$ とおくことができれば（式(13.39)参照），所期の遮へい効果を得ることができ，ベクトル量子は質量 M を獲得したことになるであろう．このような量子は力の及ぶ範囲 M^{-1} の力に関連させることができ，物理的真空は弱い力の場を遮へいして期待したとおりの短い到達距離の力にしてしまう．これは，理論が基本的にゲージ不変であるにもかかわらず，可能である．真空の遮へいカレントという概念は，おそらく Maxwell の変位電流と同じくらい基本的なものである．

13.3　物理的真空の本質，自発的対称性の破れ

真空の遮へいカレントという可能性に通ずる道は，南部(1960)によって重要な第一歩が開かれた．彼は，場の量子論の真空とは，相互作用をしている多体系の基底状態に相当する，と示唆した．真空とは，エネルギーが極小で安定な(あるいは平衡している) 配位をとる状態のことである．真空のこの概念は第 4 章の場の量子論の入門のところでは基本的な要素であった．今や，この最小エネルギーの状態は，すべての量子場が平均値ゼロをとる状態である必要はない．しかし，式(4.103) のような標準的な正規モードの展開

$$\widehat{\phi} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\widehat{a}(k) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\widehat{a}^{\dagger}(k)] \tag{13.43}$$

をすべての場に行ってみれば，

$$\widehat{a}(k)|0\rangle = 0 \tag{13.44}$$

からあきらかに

$$\langle 0|\widehat{\phi}|0\rangle = 0 \tag{13.45}$$

が成り立ち，真空中の場の量の平均値がゼロになることが自動的に導かれてしまうのである．場の量子論では，前にもしばしば経験したように，動揺がいつも可能である．したがって現実に“無”にもっとも近い状態はすべての場の平均値がゼロになる状態である，と期待できる．これが第 4 章で式(13.44)，(13.45) を受け入れた理由である．このような基底状態はきわめて対称性がよく（無よ

り対称性のよい状態を見いだすことは難しい)，われわれは基底量子状態が高度の対称性を持つという見解に慣れきってしまっている．しかしながら，理論上の真の基底状態では，ある場はゼロでない平衡値をとるということが可能である．これは非対称的な，“特記事項”の状況ではあるが，真空の遮へいカレントを作り出すためにまさに必要な状態なのである．

実際，多体系の物理学では，このような事態の実例にこと欠かない．たとえ系の構造素子の間の基本的相互作用が対称であっても，相互作用をしている系の真に安定な配位は“特記”的な非対称の状態であり得る．容易に視覚化できる一例は，磁石の簡単なモデルである．スピン同士の相互作用を記述するハミルトニアンは回転に対して不変であるが，強磁性の遷移温度以下では基底状態は回転に対して不変ではなく，むしろ空間の特定の方向がスピンの整列の方向として“特記”されている．基底状態の配位がハミルトニアンの対称性を表さない，というこの事情を，しばしば対称性は“自発的に破れている”と称する．しかし，真の意味では，対称性は破れていない．比較対照のために，もしあからさまに非対称な項をハミルトニアンにつけ加えてやれば，確かに対称性は破れてしまう．たとえば，一方向を選んで，その方向に外磁場をかけてやれば，回転に対する不変性はあからさまに破れてしまう．しかし外磁場がなければ，スピン整列の任意の方向がまったく同等であって，この意味では対称性は依然として存在する．ただ，特定の磁石の基底状態として可能な方向をひとつ選ばなければならない必要上，対称性が“隠されて”しまっているにすぎない．この事態を記述する用語として，“自発的に破れた対称性”というよりは，“隠れた対称性”，“秘められた対称性”，“潜在的対称性”，というほうがよい．ここに至って，弱い相互作用の真の対称性がなぜ観測しがたかったのか，その理由がわかりはじめたと言ってよい．われわれは“弱い相互作用の超伝導体”の内部に住んでいながら，弱い相互作用のゲージ不変性を見いだそうと苦心していたのである．われわれは，磁石の中に住んでいながら回転不変性を探し求めているColemanの魔物（Coleman，1975）と同じ状況に置かれていたのである．

磁石の基底状態では，転移温度以下で全スピンの値はゼロではない．これが“自発”磁気である．多体の物理学で知られているすべての場合について，このようなゼロでない平衡値は，巨視的にきわめて多数の構造素子を含む協力効果

の結果として生ずる．典型的に言えば，このような効果は温度がある臨界温度 T_c を超えて低下したときに現れてくる．これを，系が $T=T_c$ で相転移を起こすという．超伝導性が発現するのは，まさにこのような相転移の一例である．強磁性の発現は，さらにわかりやすい一例である．ここで磁石を例にとって，T が T_c 以下に下がったときに，ゼロでない（振幅の）平衡場が起こり得ることを，ある数学的なモデルで示してみよう．

強磁性に Landau の相転移の平均場の理論を応用するとき（たとえば Tilley and Tilley (1986) 参照），Gibbs の自由エネルギーの密度 G がエネルギー密度として適切である．G は平均自発磁化 $M(x)$ を用いて

$$G=\alpha M^2(x)+\beta M^4(x)+(\nabla M\,(x)\text{ を含む項}) \tag{13.46}$$

のように展開できる．最低エネルギーの平衡配位は，G を一定の $M(x)$ に対してもっとも小さくするものとして求められる．磁気的に無秩序である相（転移温度 T_c より上）では，この一定値はゼロであるはずである．磁気的に秩序のある相では，素スピンが巨視的な数のけたで一方向に整列し，M の値はゼロでない値をとると期待される．このような事情をモデル化して

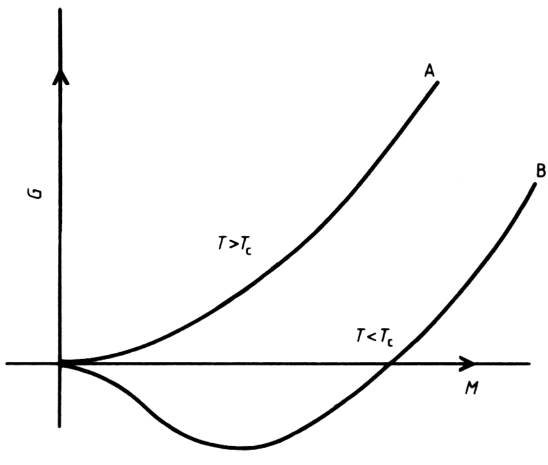


図 13.1 温度 T を指定したときの磁化 M に対する自由エネルギー G．曲線 A は $T>T_c$，曲線 B は $T<T_c$

$$G=\alpha M^2+\beta M^4 \tag{13.47}$$

とおくことができる．ここで $\beta>0$ であり，さらに，$T>T_c$ であれば $\alpha>0$（場合 A)，あるいは $T<T_c$ であれば $\alpha<0$（場合 B）であると考えよう．2つの場合のエネルギー密度は，図13.1に示すような形をとる．この図から $T<T_c$ ではゼロでない M に対してエネルギー密度極小，すなわち安定な平衡点が存在することはあきらかである．転移温度以下でゼロでない平衡値を生み出してくるような場を“秩序パラメーター”という．これはある種の“整列化”が起こる，あるいはある種の対称性が失われる†（隠される）という事実に対応する．超伝導について直接論じよう．超伝導では，巨視的な Cooper 対の波動関数 ψ が(複素)秩序パラメーターの役割を果たす．そのみかけの ψ は Ginzburg-Landau の秩序パラメーターと呼ばれる．電磁場と結合するはずだから，ψ は複素数でなくてはならない．(電磁気学は位相の理論であることを思い起こすとよい．)“相対論的超伝導体”にとって，これに対応する量はある複素場 ϕ であって，一般に Higgs 場と呼ばれる．これを

$$\hat{\phi}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\phi}_1-\mathrm{i}\hat{\phi}_2) \tag{13.48}$$

と書く．(式(4.150)参照)．強磁性体のエネルギー密度に関する Landau の平均場の理論が，ゼロでない磁化が“自発的”に現れ得る状況をモデル化することができたように，“相対論的超伝導体”の“隠れた”対称性の相を記述する（ϕ に対する）有効ポテンシャル関数を工夫することができる．しかし，$\hat{\phi}$ が古典場であって $\phi=(1/\sqrt{2})(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)$ と書ける場合から始めよう．

（古典的な）場 ϕ に対するラグランジアン“$T-V$”は

$$V(\phi)=-\frac{1}{2}\mu^2\phi^*\phi+\frac{1}{2}(\mu^2/f^2)(\phi^*\phi)^2 \tag{13.49}$$

で与えられると考える．†† ここで2つの項にかかる係数は，のちの便宜のために

†（原注）ここで整列（秩序）は対称性の消失を伴う，という主張は反省に値する．

††（原注）まさにこのような V が Ginzburg-Landau の理論で仮定された（例えば Saint-James *et al*., 1969, Tilley & Tilley, 1986 参照)．現実の超伝導体では“真空”を“基底状態”に置き換える．この形の V は Goldstone の古典的な論文（1961）ではじめて論じられた．

選ばれた書き方がしてある．符号は V が図 13.2 に描いた形になるように選んである．このポテンシャルは 2.6 節で論じたたぐいの対称性，すなわち U(1) 対称性を持っており，

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\phi \tag{13.50}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \phi_1 &\to \phi_1' = (\cos\alpha)\phi_1 - (\sin\alpha)\phi_2 \\ \phi_2 &\to \phi_2' = (\sin\alpha)\phi_1 + (\cos\alpha)\phi_2 \end{aligned} \tag{13.51}$$

のような変換に対して不変である．この変換は，ポテンシャル V の“すり鉢”を見下ろすなら，$\phi_1 - \phi_2$ 平面の回転にほかならない．V 全体はこの回転に対して対称である．それでは平衡な場の配位(量子論的な真空をモデル化する状態)はどこであろうか．ϕ_1 および ϕ_2 がともにゼロになる点 $\phi_1 = \phi_2 = 0$ は実際 V の(局所的な)極大であるが，小さな摂動が加われば場はそこから“転がり去って”しまうこともあきらかである．最小エネルギーの場の配位がしたがって平衡状態の配位であり，これは

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = f^2 \tag{13.52}$$

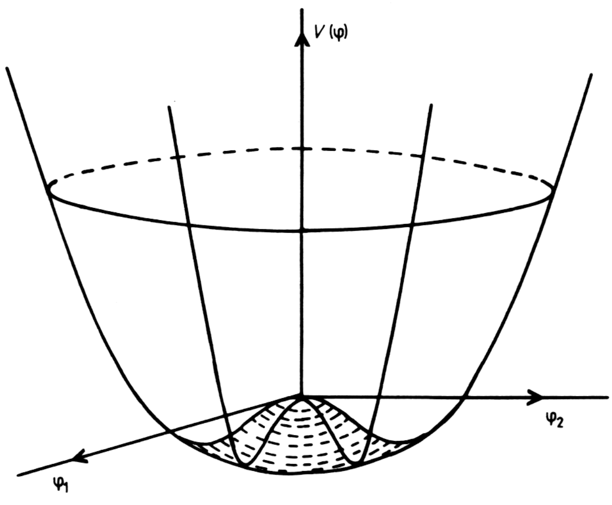


図 13.2　$\phi_1{}^2 + \phi_2{}^2 \neq 0$ の所に平衡点を持つポテンシャル (13.49)

の軌跡全体，すなわち V のすり鉢あるいは“ワインびん”の底に位置する円である．

式(13.49)のように選ばれた V の形に対しては，したがって安定な配位には無限に多い可能性がある．式(13.52) を満たす一対の (ϕ_1, ϕ_2) ならばどれでもよい．実際，この可能性は任意の θ に関するひとつのパラメーターの族

$$\phi_1 = f\cos\theta, \quad \phi_2 = f\sin\theta \tag{13.53}$$

として表されることはあきらかである．円(13.52) 全体は式(13.51) の U(1) 対称性を保存する．しかし，ひとつの基底状態（平衡位置）のみが必要である．円の上のどの点でもよいが，（例えば $\phi_1 = f$，$\phi_2 = 0$ としてもよい）いったん特定の点が“自発的に”選ばれると，U(1) 対称性はもはや失われてしまう．このとき U(1) 対称性は“隠れた”という．

量子場の場合は何が起こるであろうか．実は完全に確実とは言いがたいのであるが，素朴な解釈が成り立つと仮定することにしよう．場の量子論において

$$\hat{V}(\hat{\phi}) = -\frac{1}{2}\mu^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi} + \frac{1}{2}(\mu^2/f^2)(\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi})^2 \tag{13.54}$$

の形のポテンシャルに直面したとき，$\langle 0|\hat{\phi}_1|0\rangle = \langle 0|\hat{\phi}_2|0\rangle = 0$ になるような式(13.44)の状態 $|0\rangle$ は真の真空ではなく（これは図 13.2 の $\phi_1 = \phi_2 = 0$ の点に相当する），むしろこの場合の真の真空 $|\tilde{0}\rangle$ は $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}_1|\tilde{0}\rangle$ と $\langle\tilde{0}|\phi_2|\tilde{0}\rangle$ が円

$$(\langle\tilde{0}|\hat{\phi}_1|\tilde{0}\rangle)^2 + (\langle\tilde{0}|\hat{\phi}_2|\tilde{0}\rangle)^2 = f^2 \tag{13.55}$$

の上に載っているような状態である，と考える．式(13.53)を参照して簡潔に言えば，真の真空とは，${}_\theta\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle_\theta = (1/\sqrt{2})fe^{i\theta}$ となるような任意の状態 $|\tilde{0}\rangle_\theta$ である．あきらかにこのような状態は無限個あり，位相角 θ でパラメーター化されている．この位相は，強磁性体の磁化の方向に類推がとれる量である．任意の位相の取り方が可能である — この意味において対称性はいまだに存在する — が，実際の真空としてあるきまった位相を選んでしまえば，式(13.54) の U(1) 対称性は“自発的に”破れ，“隠れて”しまう．簡単なとり方は明らかに $\theta = 0$ であって，このとき

$$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle = f/\sqrt{2} \tag{13.56}$$

である．実際，一般には場の量子的動揺が $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ の値を（実効的な古典的）ポテンシャル極小の点上の値から変えてしまうであろう．しかし，$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \neq 0$

という可能性は正しいように思われる．とにかく，式(13.54)のポテンシャル $\hat{V}$ は，物理的真空状態では $\hat{\phi}$ の期待値が 0 でないような力学理論を，現象論的に代表するものとみなしてよい．以下に論ずるように，ゲージ場の量子に質量を与える“Higgs 機構”の決定的な点はここにある．

式(13.56)を満たす任意の状態 $|\tilde{0}\rangle$ として定義された物理的真空は，すべての場の期待値が 0 である“正規の”真空 $|0\rangle$ から摂動論で到達することのできない場の配位を表す，ということを納得するのが重要である．したがって $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \neq 0$ という基本的な仮定は，第 14 章で弱い相互作用にも最終的に課すのであるが，弱い相互作用の物理的真空は非摂動論的性格を持つ，という仮定を含んでいる．ちょうど BCS 理論が，Cooper 対のコヒーレントなプラズマとして超伝導相の基底状態の性質を確立したように，いつかある 1 組の場や相互作用を仮定して出発し，物理的真空を作りあげることができるであろう，と原理的には希望することができよう．この問題はまだ解かれていない．実際，解決まで幾多の困難を克服しなくてはなるまい．

これらの見解を特に弱い相互作用に応用することは，第 14 章で行う．† 本質的な内容は，“質量を持つ光子”というより簡単な場合を考えるのが一番よくわかるであろう．そこで，物理的な真空は実際相対論的な電磁超伝導体である，と考える結果を追求してみよう．式(13.37)に戻り，これを Higgs 場 $\hat{\phi}$ を含む量子場の方程式に格上げする．

$$\Box\hat{A}^{\nu}=\mathrm{i}q[\hat{\phi}^{\dagger}\partial^{\nu}\hat{\phi}-(\partial^{\nu}\hat{\phi}^{\dagger})\hat{\phi}]-2q^{2}\hat{A}^{\nu}\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi} \tag{13.57}$$

ここでゲージは $\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}=0$ のようにとった．†† この方程式に素朴に摂動論を適用することは，モード展開(13.43)を用いることに相当するであろうが，これは図 13.2 の不安定な点 $\hat{\phi}=0$ のまわりの展開となり，場は“小さい”ままではいられず，摂動展開はおそらく発散するであろう．それもよりは，真の真空（円

---

†(原注)そのとき“Higgs 機構”を非可換的な場合に拡張することを考える必要がある．

††(原注)厳密に言えば，このゲージ条件は場の量子論では成り立たせることができない．5.6 節で注意したように，この条件は $\hat{A}^{\mu}$ の正準交換関係と矛盾するからである（例えば Aitchison, 1982 参照）．ここでゲージの任意性を持つ場を量子化する完全な場の量子論の問題に深入りするつもりはない．“$\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}=0$”の条件下に得られる結果は正しいのである．13.5 節ではいずれこの条件を緩和する．

(13.55) 上の任意の点) の値のまわりに小さなずれを考え，それを用いて摂動論を展開するほうがもっともらしい．例えば

$$\hat{\phi}=f/\sqrt{2}+\hat{\rho}/\sqrt{2} \tag{13.58}$$

とおき，条件(13.56) と矛盾しないよう $\langle\tilde{0}|\hat{\rho}|\tilde{0}\rangle=0$ と考える．

式(13.58) を式(13.57) に代入すると

$$\Box\hat{A}^{\nu}=-q^2f^2\hat{A}^{\nu}+\hat{\rho}\ \text{に依存する相互作用} \tag{13.59}$$

となる．13.4 節で $\hat{\rho}$ に依存する項に立ち帰ってこれを論ずるが，いまは式(13.59) の $-q^2f^2\hat{A}^{\nu}$ 項が所期の遮へい項の形 “$-M^2\hat{A}^{\nu}$” をとることを強調しておかなくてはならない．$M=qf$ とおけば式 (13.37) のすぐあとで希望していたとおりになっている．このようにして，場 $\hat{\phi}$ のゼロでない真空期待値が実際に真空の遮へいカレントを発現させ，したがって $\hat{A}^{\nu}$ の量子に質量を生じさせるのである．

しかしながら，今まで展開した議論は不完全である．われわれの用いた基礎方程式

$$\Box\hat{A}^{\nu}=\hat{j}^{\nu} \tag{13.60}$$

は，ゲージの選択 $\partial_{\mu}A^{\mu}=0$ のもとでのみ正しい．したがってすべての解析はこのゲージのもとでのみ成り立ち，ゲージ不変性が失われているように見える．次の問題は，理論のゲージ不変性を維持しながら，実際に光子の質量を作り出すことができるかどうか，ということでなくてはならない．

13.4　対称性が隠れている場合のゲージ不変性

ゲージ不変性と呼ぶ対称性の本質的な内容を思い起こしてみよう．$\hat{\phi}$ のような荷電場に対して，位相の局所的変化は電磁ポテンシャルのゲージ変換によって相殺することができる(2.5 節および 4.6 節)，というのである．すなわち理論は局所的位相不変性を持つ．式(4.194)，(4.195) で与えられる $\hat{\phi}$ および $\hat{A}^{\mu}$ の “最小”ラグランジアンは，構成上この性質を持っている．しかしこの局所的ゲージ変換は，この最小 $\hat{\phi}-\hat{A}^{\mu}$ ラグランジアンに，式(13.54)のポテンシャル $\hat{V}$ を付け加えても同じように成立する．これは式(13.54) もまた局所的に U(1) 位相不変であり，場の微係数を含まないからである．こうしてできたラグランジアンに，自由な光子場のラグランジアンを足し合わせると，“相対論的超伝導体”

の完全な場の量子論版になる.

$$\hat{\mathscr{L}}=[(\partial^\mu+\mathrm{i}q\hat{A}^\mu)\hat{\phi}]^\dagger[(\partial_\mu+\mathrm{i}q\hat{A}_\mu)\hat{\phi}]-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\mu^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}-\frac{1}{2}(\mu^2/f^2)(\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi})^2 \tag{13.61}$$

これが可換 Higgs 模型（Higgs, 1964）のラグランジアンである. $\hat{A}^\nu$ に対する運動方程式はまさしく式(13.57) である. したがって式(13.61) は局所的に U(1) 不変, すなわちゲージ不変である. しかし $\hat{V}$ を加えたことにより $\hat{\phi}$ に対してはゼロでない真空期待値が生じ（と仮定している), 実際無限に多くの可能な真空が存在し, そのうちのひとつを選べば U(1) 対称性を自発的に破る. 例えば, 式(13.58) では $\hat{\phi}$ を実にとることで対称性を破った. しかし, このような選択は強制されたものではなく, もし異なる選択をしても同じ物理が出てくることを確めておかなくてはならない. ゲージ対称性はいったん破れても潜在的に存在しなくてはならない. そこで式(13.58)のような選び方が, ゲージ不変性を壊すかどうか調べてみる必要がある.

ゲージ不変性の問題を 2 段にわけて取り扱おう. この節では, $\hat{\phi}$ が実数になるゲージをとり得ることを示す. 次の節では, このようにとらなかったら何が起こるかを説明しよう. これは単にゲージ不変性の型式的な検証以上のたくさんの内容を含むことが判明する. その議論はくりこみ可能性の問題にとって基本的に大切である.

そこで

$$\hat{\phi}=|\hat{\phi}|\exp[\mathrm{i}\,\hat{\alpha}(x)] \tag{13.62}$$

$$|\hat{\phi}|=f/\sqrt{2}+\cdots \tag{13.63}$$

のように書くとどうなるか調べてみよう. 式(13.62), (13.63) を式(13.57) に代入し, ほかのすべての相互作用を無視すると

$$\Box\hat{A}^\nu=-q^2f^2(\hat{A}^\nu+q^{-1}\partial^\nu\hat{\alpha}) \tag{13.64}$$

を得る. この式の右辺は非相対論的なカレント(13.20)に直接対応がとれる. 式(13.64) は一見したところ所期の質量を持つ光子の方程式

$$(\Box+M^2)\hat{A}^\nu=0 \tag{13.65}$$

とはなじまないように思われる. しかしこの結論は急ぎすぎである. 式(13.65)

はゲージ $\partial_\mu \hat{A}^\mu=0$ のもとでのみ正しいからである．むしろ条件 $\partial_\mu \hat{A}^\mu=0$ が課せられる以前の $\hat{A}^\nu$ の完全な方程式を考察すべきである．すると，場 $\hat{A}^\nu$ が Higgs の真空を伝播するときは方程式

$$\Box \hat{A}^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu \hat{A}^\mu)=-q^2 f^2(\hat{A}^\nu+q^{-1}\partial^\nu \hat{\alpha}) \tag{13.66}$$

に支配される．任意の場 $\hat{\chi}$ に対してゲージ変換は

$$\hat{A}^\nu \to \hat{A}'^\nu=\hat{A}^\nu-\partial^\nu \hat{\chi} \tag{13.67}$$

の形を持つから，場 $(\hat{A}^\nu+q^{-1}\partial^\nu \hat{\alpha})$ 全体を完全に受け入れ可能なベクトル・ポテンシャルとみなすことができる．まず

$$\hat{A}'^\nu \equiv \hat{A}^\nu+q^{-1}\partial^\nu \hat{\alpha} \tag{13.68}$$

を定義する．$\hat{A}^\nu$ の方程式の左辺は変換(13.67)のもとで不変であるから，だいぶ前に導いたように，$\hat{A}'^\nu$ に対するポテンシャルは

$$\Box \hat{A}'^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu \hat{A}'^\mu)=-q^2 f^2 \hat{A}'^\nu \tag{13.69}$$

となる．したがって，安定性のため

$$\hat{\phi}=(f/2^{1/2})\exp[\mathrm{i}\,\hat{\alpha}(x)]+\cdots \tag{13.70}$$

のように表される配位では，場 $\hat{A}'^\nu$ は（ほかの相互作用を無視するとき）方程式

$$(\Box+M^2)\hat{A}'^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu \hat{A}'^\mu)=0 \tag{13.71}$$

を満たす．ここに $M=qf$ で，この方程式は質量 M を持つ自由なベクトル粒子の標準的な波動方程式にほかならない．いま見たように $\hat{A}'^\nu$ は電磁的ベクトル・ポテンシャルとみなすべき完全な資格を持っており，このベクトル場が式(13.71) を満たすことが導かれた．これは強調するに足る．

式(13.4)，(13.5)，(13.6) 同様方程式(13.71) よりなじみ深いスピン 1 の条件

$$\partial_\mu \hat{A}'^\mu=0 \tag{13.72}$$

が得られ，式(13.71) は最後に

$$(\Box+M^2)\hat{A}'^\nu=0 \tag{13.73}$$

に帰着する．さらにこの解析は ― 特に式(13.68) ― は，ゲージ場を質量のあるものにするため，自由度（Higgs の場の位相 ϕ）が取り上げられてしまうことをあからさまに示している．

これが第 3 の自由度の起源に関する問いの答えである．現実の超伝導体の場

合は，対の波動関数 ψ の位相は対の局所的な重心運動量に関連している．対はすべて，コヒーレントに重心運動量が同じ状態にある．この相での振動は物理的にはプラズマ振動に対応し，まさにベクトル・ポテンシャルの縦成分が結合するモードを正しく表現する．

関係式

$$\hat{A}'^{\nu}=\hat{A}^{\nu}+q^{-1}\partial^{\nu}\hat{\alpha} \tag{13.68}$$

を $\hat{A}^{\mu}$ に施したゲージ変換と解釈するには，式(13.72)と矛盾しないため $\hat{A}^{\mu}$ を

$$\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}=-q^{-1}\Box\hat{\alpha} \tag{13.74}$$

というゲージで指定された場とみなさなくてはならない（181 ページの注を参照）．$\hat{A}^{\mu}$ と $\hat{\alpha}$ で記述される状況から $\hat{A}'^{\mu}$ で記述される状況へ式(13.68)によって移るとき，ゲージ関数 $\hat{\chi}$ を

$$\hat{\chi}=-\hat{\alpha}/q \tag{13.75}$$

と選んだ．したがって，関連する局所的位相変化が

$$\hat{\phi}\to\hat{\phi}'=\exp[\mathrm{i}q\hat{\chi}(x)]\hat{\phi}=\exp[-\mathrm{i}\hat{\alpha}(x)]\hat{\phi} \tag{13.76}$$

の形をとることを思い起こすと，式(13.76)，(13.72) を比較して，このゲージでは $\hat{\phi}$ の位相はゼロに帰着することがわかる．さきに $\hat{\phi}$ を定数値にとる特別な選択を行ったのは，実は何も実際の制限になっていないことがわかった．$\hat{\phi}$ に対してゼロでない位相をとって出発すれば，ベクトル・ポテンシャルのゲージに特別な選択を行って，$\hat{\phi}$ の位相をゼロに帰着させることができるからである．†

さて，ϕ のある位相 α から出発するが，A^{ν} のゲージ自由度を利用して α をゼ

---

†（原注）$\hat{\phi}$ を対波動関数 ψ で置き換える現実の超伝導体の場合には，ここに微妙かつ重要な条件をひとつ付さなくてはならない．2つの議論は，暗黙のうちに ψ の偏角（すなわち arg ψ）は一意に決まると仮定している．実際はそうである必要はない．ふつう ψ は一価であると仮定する習慣があるが，それでも arg ψ は 2π の整数倍の範囲で任意である．この修正が重要かどうかは，“超伝導体”が — 現実のものであれ教育的なモデルであれ — 単一連結であるか否か，すなわち穴があいているか否かによる．穴は超伝導体の物理的形状の結果として生ずるか，あるいは第2種の超伝導体では磁束のフィラメントの存在する領域として生ずるかもしれない．ψ の偏角の任意性が 2π の整数倍に制限されるという事実は，このような穴を貫ぬく磁束の量子化に導くことを示すことができる．この点が素粒子の物理と関連し得るかどうか，15.3 節で論ずる．余談であるが超伝導の理論では，対波動関数を実数にとるゲージを“London ゲージ”と呼んでいる．

ロにとるということをしなかったらどうなるであろうか．このときは，ベクトル粒子の運動方程式，したがって伝播関数がゲージのとり方によることがわかる．さらに位相場 α に付随する自由度に対応する量子を含む Feynman 図形も，矛盾のない理論では取り入れなくてはならない．もちろん，この場がゼロになるようなゲージがとれる，という事実からもあきらかなように，この自由度は物理的なものではないはずである．伝播関数がゲージによるということは，よく考えれば救いであるが，とにかく，このようにして生み出された質量を持つベクトルボソンが，単に波動方程式(13.71)で記述されるだけ，というのであれば，第 12 章に詳述した質量を持つベクトル粒子に伴うすべての困難は，まったく未解決のまま残ってしまうであろう．のちの議論からわかるように，$\hat{\phi}$ を実数にするようなゲージとは異なるゲージをとることは，まさに，式(13.71)に付随した高エネルギー領域の好ましからざるふるまいを改良する効果があるのである．結局は，これが 12.4 節に述べたすばらしい事実の理由になっている．ベクトル粒子が真空の遮へいカレントの機構によって質量を獲得するような理論は，くりこみ可能である（'t Hooft，1971 b)．

次の節で，別のゲージの問題を少し詳しく取り扱う．しばらくの間，ϕ が実数であるゲージを考え，どのような相互作用が理論の中に残ってくるか調べよう．今まで，ゲージ不変な理論から出発して，自由なスピン 1 の粒子に質量を与える問題に専念してきた．したがって $|\phi|=f/\sqrt{2}$ とおいて式(13.73)に到達したのであった．この場合，$\hat{\phi}$ の持っていた 2 つの自由度のうちひとつ — 位相，図 13.2 の“円のまわりの運動”に対応する — は $\hat{A}^\nu$ に移って質量を与え，ほかのひとつ — 図 13.2 の“動径方向の運動” — は，$|\phi|$ を一定に取っているから消失している．しかし，動径方向の振動は式(13.58) に戻ればすぐみつかる．式(13.58) を式(13.57) に代入すれば

$$(\Box+M^2)\hat{A}^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu\hat{A}^\mu)=-2q^2f\hat{\rho}(x)\hat{A}^\nu-q^2\hat{\rho}^2(x)\hat{A}^\nu \tag{13.77}$$

を得る．これは質量を持つベクトル場 $\hat{A}^\nu$ が，中性スカラー場 $\hat{\rho}(x)$ と特定の形で結合したときの運動方程式である．$\hat{\rho}$ の量子 (Higgs ボソンと呼ばれる) は，$\hat{\phi}$ の“動径方向”の自由度の粒子像である．式(13.77) から摂動論を展開するのは意味があると考えてよい．それは $\hat{\phi}$ の安定な値のまわりの小さな振動を考察することになるからである．この“電磁的超伝導真空”は，物理的に関心のあ

る弱い相互作用への応用に備えて，途中で挿入した教育的なモデルにすぎないから，これ以上，結合の正確な形やそれに関連した Feynman 図形を追求する必要はない．ただ，次の一般的な視点を与えておけば足りる．あからさまなゲージ不変性を，位相の選択

$$\hat{\phi}=[f+\hat{\rho}(x)]/2^{1/2} \tag{13.58}$$

によって破るとき，ゲージ不変な出発点（式(13.66) 参照）

$$\Box\hat{A}^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu})=\hat{j}^{\nu} \tag{13.78}$$

から見れば，一見ゲージ不変でない結果(13.77) を生じたことになる．しかし，すでに論じたように，位相やゲージを違うように選んでも，同じ物理になるのである．したがって，式(13.77)から次の結論を導くことができる．もとのゲージ不変性の基本的結果は，理論のパラメーター間の特定な関係として現れる．上に用いたゲージの例では，$M=qf$ の関係および $\hat{A}^{\nu}$ と $\hat{\rho}$ の結合が q と f とによって決まることがそれにあたる．したがってこのような関係を検証することが，現実の世界の隠れた弱い対称性を実験的に同定する方法であるはずである．

場の理論のもう少し現実的ないくつかの例において，理論のパラメーター間のこのような関係が，好ましくない高エネルギー領域の挙動を与える図形を相殺するためにまさに必要であり，したがって質量を持つベクトルボソンの理論をくりこみ可能にする，ということがあからさまに証明されているのである（たとえば L. Smith (1974) 参照）．質量を持つベクトル場のくりこみ可能な理論は，隠れたゲージ不変性を持つものに限る，ということが一般に信じられている．したがってこれこそが，以前に論じた弱い相互作用の現象論を，理論に作り上げる唯一の方法なのである．

13.5 't Hooft のゲージ

さて最後の難問に立ち向かうとしよう．もしパラメーター化

$$\hat{\phi}=|\hat{\phi}|e^{i\hat{\alpha}(x)}$$

を行い

$$\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}=-q^{-1}\Box\hat{\alpha} \tag{13.79}$$

のゲージ (181 ページの脚注††を参照) をとらなかったとすれば，何が起こるかを考察しよう．これは位相の自由度を消去して，電磁場の運動方程式を質量を持つベクトルボソンの方程式に還元する変換を可能にするゲージであった．複素 Higgs 場の ϕ の偏角と絶対値の 2 つの独立な自由度を用いるかわりに，ϕ をきわめて一般的に

$$\hat{\phi}(x)=2^{-1/2}[f+\hat{\chi}_1(x)+i\hat{\chi}_2(x)] \tag{13.80}$$

と分解してパラメーター化する (式(13.58) と比較せよ)．ここに χ_1 と χ_2 の真空値はともに 0 である．$\hat{\phi}$ のこの形を $\hat{A}^\nu$ の主幹方程式

$$\square\hat{A}^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu\hat{A}^\mu)=\mathrm{i}q[\hat{\phi}^\dagger(\partial^\nu\hat{\phi})-(\partial^\nu\hat{\phi}^\dagger)\hat{\phi}]-2q^2\hat{A}^\nu\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi} \tag{13.81}$$

に代入すると，$M=qf$ として

$$\begin{aligned}(\square+M^2)\hat{A}^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu\hat{A}^\mu)=&-M\partial^\nu\hat{\chi}_2+q(\hat{\chi}_2\partial^\nu\hat{\chi}_1-\hat{\chi}_1\partial^\nu\hat{\chi}_2)\\&-q^2\hat{A}^\nu(\hat{\chi}_1{}^2+2f\hat{\chi}_1+\hat{\chi}_2^2)\end{aligned} \tag{13.82}$$

の形の運動方程式を得る (問題 13.1)．一見したところ，これは質量を持つ普通のベクトル場 $\hat{A}^\nu$ が，いささか複雑なカレントと結合した運動方程式のように見える．しかし，自由度を勘定してみればすぐわかるように，これはあきらかに正しくない．前のゲージでは，4 個の自由度があった．初めの質量を持たない $\hat{A}^\nu$ の 2 つの自由度と，$\hat{\alpha}$ および $\hat{\rho}$ にひとつずつの自由度の併せて 4 個か，あるいは質量を持つ $\hat{A}'^\nu$ の 3 つの自由度と $\hat{\rho}$ のひとつの自由度の併せて 4 個である．この新しい方程式を表面だけ見れば，質量を持つ場 $\hat{A}^\nu$ の 3 つの自由度と，$\hat{\chi}_1$，$\hat{\chi}_2$ にひとつずつの合計 5 個の自由度があるように見える．実際，ゲージ選択の自由を用いて $\hat{\chi}_2$ を 0 におくこと，すなわち $\hat{\phi}$ を実数に還元して余分な自由度を消去できることは，すでによく知っている．そうすれば式 (13.58) の形にもどる．式(13.82)に関しては，望ましくない自由度がでてくることはきわめて微妙であって，すべてのゲージ理論に共通する事柄である．難点は，$\hat{A}^\nu$ の伝播関数を式(13.82)から算出しようとするときに現れる．左辺の演算子は，10.1 節に行ったように簡単に逆がとれて，質量を持つベクトルボソンの標準的な伝播関数

$$(-g^{\mu\nu}+k^\mu k^\nu/M^2)/(k^2-M^2) \tag{13.83}$$

がみかけ上得られる．しかし，右辺のカレントはいささか特殊である．$\hat{A}^\nu$ が 2 個または 3 個の粒子と結びつく項だけでなく，ただ 1 個の粒子と結合する項が

ある. これは $-M\partial^{\nu}\hat{\chi}_2$ の項で, $\hat{A}^{\nu}$ が直接スカラー場 $\hat{\chi}_2$ に微分型 $-M\partial^{\nu}$ で結合している. 運動量空間では, 図 13.3 に示すように, これは結合の強さ $-\mathrm{i}k^{\nu}M$ を持つ頂点に対応する.

あきらかに, スカラー粒子に対しては運動量の 4 元ベクトルが, ベクトルボソンのベクトル指標と結合し得る唯一のベクトル量である. このような結合があれば $\hat{A}^{\nu}$ の伝播関数と $\hat{\chi}_2$ の伝播関数は必然的に混ざってしまう. ベクトル粒子の完全な伝播関数は, 図 13.4 に図形として示した量を, 無限級数として足し上げなくてはならない. このような複雑さは, もちろん, $\hat{\chi}_2=0$ ととるゲージでは完全に消去されている. しかし, $\hat{\chi}_2\neq 0$ の場合を追求することに目下の関心があるわけである.

図 13.4 で唯一の未知の因子は $\hat{\chi}_2$ の伝播関数である. これに対してはスカラー場の特定のモデルを設定しなくてはならない. $\hat{\phi}$ が 0 でない真空値を生み出すような現実の特定のモデルは, $\hat{\chi}_2$ が質量を持たない場で伝播関数が $1/k^2$ になるものである. 図形のすべての要素が既知であるから, よく知られた結果

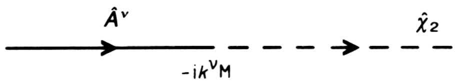


図 13.3 $\hat{A}^{\nu}-\hat{\chi}_2$ の結合

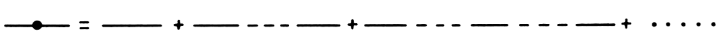


図 13.4 完全な $\hat{A}^{\nu}$ 伝播関数の級数形

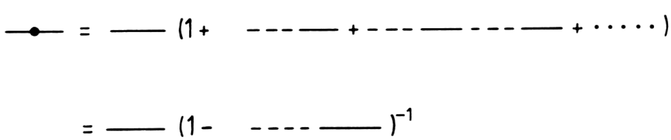


図 13.5 図 13.4 の級数の型式的な和

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{13.84}$$

を一般化して形式的に級数の和を求めることができる．図形的には，図13.4を図13.5のように書き換えて和をとる．伝播関数とベクトル・スカラー結合の表式を代入し，指標を合わせると，完全な伝播関数の最終的な形

$$\frac{-g^{\mu\lambda}+k^{\mu}k^{\lambda}/M^2}{k^2-M^2}(\delta^{\nu}_{\lambda}-k^{\nu}k_{\lambda}/k^2)^{-1} \tag{13.85}$$

が得られる．したがって逆演算子

$$(-k^2g^{\nu\lambda}+k^{\nu}k^{\lambda})^{-1} \tag{13.86}$$

を計算する必要がある．(指標および k^2 の因子を少し整頓した．) これを10.1節で用いた方法によって求めよう．A および B が

$$(-k^2g^{\mu\lambda}+k^{\mu}k^{\lambda})(Ag_{\lambda\nu}+Bk_{\lambda}k_{\nu})=\delta^{\mu}_{\nu} \tag{13.87}$$

を成立させると要請する．乗法を行えば

$$-k^2A\delta^{\mu}_{\nu}-Bk^2k^{\mu}k_{\nu}+Ak^{\mu}k_{\nu}+Bk^2k^{\mu}k_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu} \tag{13.88}$$

となり，いかなる A に対しても成立し得ない．演算子は逆を持たないのである．式(13.82) ではうまくいきそうに見えたが，そうではない．

ここで警鐘乱打ということになるかもしれない．というのは電気力学の運動方程式

$$\Box\hat{A}^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu})=\hat{j}^{\nu} \tag{13.78}$$

から運動量空間の光子の伝播関数は

$$(-k^2g^{\mu\nu}+k^{\mu}k^{\nu})^{-1} \tag{13.89}$$

となるように見えるからである．いま示したように，これは存在しない．これは実は同じ病気であって，治療法も同じである．ゲージ理論ではすべて，伝播関数を定義するためにゲージを選ばなくてはならない．QEDではいつも (共変的な) Lorentz ゲージ $\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}=0$ をとった．このとき演算子方程式

$$\Box\hat{A}^{\nu}=\hat{j}^{\nu} \tag{13.60}$$

の逆演算子は自明である．以下に見るように，もっと一般的なゲージのとり方も可能で，光子の伝播関数もいろいろな形をとる．

“隠れたゲージ不変性” の場合にもどり，方程式

$$(\Box+M^2)\hat{A}^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu})=-M\partial^{\nu}\hat{\chi}_2+q(\hat{\chi}_2\partial^{\nu}\hat{\chi}_1-\hat{\chi}_1\partial^{\nu}\hat{\chi}_2)$$
$$-q^2\hat{A}^{\nu}(\hat{\chi}_1^2+2f\hat{\chi}_1+\hat{\chi}_2^2) \tag{13.82}$$

を考えよう．$\hat{A}^\nu$ の伝播関数に伴う難点は，ゲージの選択によって克服されるはずである．ゲージを選択する巧妙な方法は 't Hooft (1971 b) によって示唆された．いまの場合（可換的な場合）にひきなおすと，式(13.82) の中で

$$\boxed{\partial_\mu \hat{A}^\mu = M\xi\hat{\chi}_2} \tag{13.90}$$

とおく[†]，という提案である．ここに ξ は任意のパラメーターである．これはいまだあからさまに共変的な形を保っており，そのうえ実効的に自由度をひとつ減らす．この条件をとりいれると

$$\begin{aligned}(\Box + M^2)\hat{A}^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu \hat{A}^\mu)(1-1/\xi) \\ = q(\hat{\chi}_2\partial^\nu\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_1\partial^\nu\hat{\chi}_2) - q^2\hat{A}^\nu(\hat{\chi}_1^2 + 2f\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_2^2)\end{aligned} \tag{13.91}$$

となる．左辺の演算子は今度は逆を持つ(問題 13.2)．ゲージボソンの伝播関数の一般的な形は

$$\left[-g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi)k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M^2}\right](k^2 - M^2)^{-1} \tag{13.92}$$

である．

この伝播関数にはきわめて注目すべき性質がある[††]．質量を持つベクトルボソンの標準的な伝播関数

$$(-g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu / M^2)(k^2 - M^2)^{-1} \tag{13.83}$$

は，$\xi \to \infty$ の極限として得られることがわかる．このゲージでは，第 12 章で述べた高エネルギー領域でのすべての難点が，くりこみ可能性をおびやかすように思われる．(実は，このゲージに対しても矛盾のない Feynman の規則が存在し，必要なすべての相殺が起こっている．) しかし，任意の有限な ξ に対しては，ゲージボソンの伝播関数の高エネルギー領域でのふるまいは，実際に，$\sim 1/k^2$ であって，Lorentz ゲージの QED と同じ程度にくりこみ可能である．しかし，伝

[†] (原注) 181 ページの第 2 の脚注がここにも適用される．しかし古典的な（枝線図形の）範囲では結果は正しい．われわれの議論は実際上この範囲を超えない．

[††] (原注) 類似した形のベクトルボソンの伝播関数は，最初に Lee & Yang (1962) によって導入された．しかし彼らの議論は自発的に破れている理論の範囲ではなかったので，Higgs 粒子も存在せず，$\xi \to 0$ の極限でのみしか物理的意味を持たなかった．

播関数には $k^2=\xi M^2$ のところに別の極が現れること（式(13.92) 参照）に注意しなくてはならない．この極は任意のパラメーター ξ に依存するからあきらかに物理的な極ではない．完全な取り扱い（t'Hooft，1971b）をすると，$\hat{\chi}_2$ 場の伝播関数にも正確に同じような極が現れて，両者が常に相殺してしまうことが証明される．ξ を有限に保つゲージを R ゲージ (renormalisable の R) といい，ふつう $\hat{\chi}_2$ のような非物理的 Higgs 場を含む．$\xi\to\infty$ のゲージを U ゲージ (unitary の U) といい，物理的な粒子しか現れない．枝線図形を計算するときは，もちろん U ゲージの Feynman 規則を用いるのが一番容易である．しかし閉線図形の計算では，U ゲージに技術的難点が生じて，R ゲージのほうがやさしくなる．

ゲージボソンの伝播関数の基幹表式

$$\left[-g^{\mu\nu}+\frac{(1-\xi)k^\mu k^\nu}{k^2-\xi M^2}\right](k^2-M^2)^{-1} \tag{13.92}$$

では，$M\to 0$ の極限をとれることに注意してほしい (12.2 節に述べた M の極限の注意を参照せよ)．そうすれば任意のゲージにおける質量を持たないベクトルボソン（光子）の伝播関数

$$\boxed{[-g^{\mu\nu}+(1-\xi)k^\mu k^\nu/k^2]k^{-2}} \tag{13.93}$$

が得られる．QED の計算に用いた Lorentz ゲージは，この表式で $\xi=1$ とおいた場合にあたっている．これを Feynman ゲージという．

さてこれらの考えを（非可換的な）GSW 電弱理論に拡張する議論に進もう．

まとめ

(1)　ゲージ不変性をあからさまに表し，かつ質量を持つベクトル粒子の理論は一見不可能である．

(2)　遮へいカレントの条件．

(3)　原子における遮へいカレント．

(4)　超伝導体における遮へいカレント．

　巨視的波動関数．

　単一量子状態のコヒーレントな占有．

凝縮.

非摂動的性格.

(5) Higgs 模型（相対論的超伝導体）.

真空の遮へいカレントを生ずる Higgs 場.

(6) 物理的真空.

基底状態としての真空.

基底状態における自発的対称性の破れ.

強磁性体.

超伝導体，自発的に破れた U(1) 対称性.

$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \neq 0$ の条件.

$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \neq 0$ の条件から生ずる真空の遮へいカレント.

(7) ゲージ不変性.

Higgs 模型.

$\hat{\phi}$ の位相の選択でゲージ不変性を壊す.

$\hat{A}^{\nu}$ を変えてゲージ不変性を回復する.

$\hat{\phi}$ を実数にとる可能性.

ゲージボソンの伝播関数はゲージの選び方による.

このような理論はくりこみ可能である.

(8) 't Hooft のゲージ.

$\hat{\phi}$ が実数以外のゲージでは“非物理的 Higgs 場”$\hat{\chi}_2$ から余分な寄与が生ずる.

ゲージボソンの伝播関数の一般的な難点.

't Hooft のゲージと伝播関数の一般形.

光子の伝播関数.

問題

13.1 方程式 (13.82) を証明せよ.

13.2 いつものように A^{μ} の平面波を考え，演算子

$$(\Box+M^2)g^{\nu\mu}-(1-1/\xi)\partial^{\nu}\partial^{\mu}$$

の運動量空間における逆演算子を求めよ．この式は(指標を少し変えただけで）式(13.91）である．これから式(13.92）を導け．

第 14 章 Glashow-Salam-Weinbergの電弱相互作用のゲージ理論

14.1 序論

第 10 章と第 11 章で弱い相互作用の低エネルギー領域での現象論を紹介し，第 12 章では現象論は理論とはみなし得ないことを強調した．ゲージ原理(ある局所的位相変換に対する不変性）を弱い相互作用に適用すると，はじめて真の理論が導けるのである．Glashow，Salam，Weinberg (GSW) 3 人の名前を冠して呼ばれる特定の理論を主として考察することになるが，この理論は現在では電磁および弱い相互作用の“標準モデル”と呼ばれることが多い．これは，第 13 章の意味で局所的位相変換の不変性が“隠れて”いる非可換ゲージ理論である．したがって，破れていない（顕在的）非可換ゲージ対称性にくらべて多少こみいってくる．これがQCD を最初に論じた理由である．特に，GSW 理論の Feynman 規則は，ゲージ量子に質量を生み出すスカラー場（“Higgs”場）を含む図形に対して，ある処方を与える必要がある．

低エネルギー領域の現象論を理論に転化させたい，と望めばどうすればよいであろうか．その方法を考えて理論の動機づけに迫ってみよう．まず，クォークおよびレプトン・カレントの既知の $V-A$ 構造から，弱い相互作用の場の量子はベクトル粒子であるはずである．第 10 章の議論から，この粒子は質量と電荷を持つはずである．弱い相互作用の到達距離は短く，カレントが帯電しているからである．質量を持つ帯電したベクトルボソンのくりこみ可能な唯一の理論は，ボソンがゲージ対称性に従い，質量を獲得するためにこの対称性が隠れている理論である．そもそも質量を持つ帯電粒子 W が存在するならば，W 粒子の電磁相互作用さえも意味を持つためには，隠れたゲージ不変性の加護を願わなくてはならないということは，注目に値する．

さらに，ゲージ原理が一枚かんでくることを強く示唆する実験的な手がかり

として，レプトンにもクォークにも共通な，弱い相互作用の“普遍的な強さ”を設定し得るという経験事実がある．Cabibbo 回転を行ったうえでクォークの弱い荷電カレントは，レプトンの弱い荷電カレントと同じ結合の強さ g を持つことは，11.1 節で学んだ．（表 11.1 参照）このような“普遍性”はまさに弱い相互作用のゲージ理論から期待されるもので，“弱い荷量”g が QED の U(1) 電磁ゲージ変換の e に対応する役目を果たすのである．

残る疑問は，それでは局所的位相変換のしかるべき対称群，すなわち弱いゲージ群は何かということである．いくつかの可能性が提示されたが，現在では，初め Glashow (1961) によって提出され，続いて Weinberg (1967)，Salam (1968) によって隠れた対称性として取り扱われ，その後多くの研究者によって拡張された理論が，現存のすべての実験データと一致することが非常によく確かめられている．ここでは理論の実験的検証について批判的な概観は行わない．そのかわり，直接 GSW 理論の核心に触れて，必要があれば実験データを参照することにしよう．

14.2　弱いアイソスピンと弱いハイパー荷，電弱相互作用の SU(2)×U(1) 対称性

弱い相互作用の対称群を探る重要な糸口は，この相互作用によって引き起こされる遷移を考察することから得られる．これは原子準位間の電磁遷移を調べて，準位の多重構造，したがって回転群の表現（Schrödinger 方程式の顕著な対称性）を見いだすことにいささか似ている．しかし，初めから力説しておく値打ちのあることであるが，ここで考える“弱い多重子”と普通の“顕在的”対称性の多重子との間には，非常に重要な違いがひとつある．潜在的対称性のこの一面は，第 13 章で論じた可換群の例では現れてこない．

第 8 章で非可換大局的対称性は，質量について縮退している多重子状態の存在によってあらわになることを見た．しかしそのときの議論では，対称性が“隠れて”いないことを言わず語らずのうちに仮定していたのであった．対称性が隠れていると，縮退した多重構造は一般にまったく現れてこない．

第 8 章に与えた多重子の議論のどこが成り立たなくなるのであろうか．それを知るためには 8.2 節の場の理論の定式化を用いる必要がある．対称性の生成

演算子，例えば $\hat{T}_i$，は場のエルミート演算子で，いろいろな状態は真空に演算子を作用させて作られる．2 つの状態 $|A\rangle$，$|B\rangle$ を考えよう．

$$|A\rangle=\hat{\phi}_A^\dagger|0\rangle, \qquad |B\rangle=\hat{\phi}_B^\dagger|0\rangle \tag{14.1}$$

ここに $\hat{\phi}_A^\dagger$，$\hat{\phi}_B^\dagger$ はそれぞれ

$$[\hat{T},\ \hat{\phi}_A^\dagger]=\hat{\phi}_B^\dagger \tag{14.2}$$

のように関連している（式(8.54) 参照）．$\hat{T}$ は対称群のある生成演算子で

$$[\hat{T},\ \hat{H}]=0 \tag{14.3}$$

を満たす．式(14.2) は無限小変換 $\hat{U}\sim 1+\mathrm{i}\varepsilon\hat{T}$ に対して

$$\hat{U}\hat{\phi}_A^\dagger\hat{U}^{-1}\approx\hat{\phi}_A^\dagger+\mathrm{i}\varepsilon\hat{\phi}_B^\dagger \tag{14.4}$$

と等価である．したがって $\hat{\phi}_A^\dagger$ は $\hat{U}$ によって $\hat{\phi}_B^\dagger$ へ“回転”され，演算子 $\tilde{\phi}_A^\dagger$，$\tilde{\phi}_B^\dagger$ は対称変換に関係した状態を作り出す．縮退

$$E_A=E_B \quad \text{の場合} \quad \hat{H}|A\rangle=E_A|A\rangle,\ \hat{H}|B\rangle=E_B|B\rangle \tag{14.5}$$

を証明するに必要な仮定を探すことにしよう．まず

$$E_B|B\rangle=\hat{H}|B\rangle=\hat{H}\hat{\phi}_B^\dagger|0=\hat{H}(\hat{T}\hat{\phi}_A^\dagger-\hat{\phi}_A^\dagger\hat{T})|0\rangle \tag{14.6}$$

が成り立つから，もし

$$\hat{T}|0\rangle=0 \tag{14.7}$$

であれば，式(14.6) の右辺を

$$\begin{aligned}\hat{H}\hat{T}\hat{\phi}_A^\dagger|0\rangle&=\hat{T}\hat{H}\hat{\phi}_A^\dagger|0 \qquad \text{式(14.3) を使って}\ \hat{T}\hat{H}|A\rangle=E_A\hat{T}|A\rangle\\&=E_A\hat{T}\hat{\phi}_A^\dagger|0\rangle=E_A(\hat{\phi}_B^\dagger+\hat{\phi}_A^\dagger\hat{T})|0\rangle \qquad \text{式(14.2) を使って}\\&=E_A|B\rangle \qquad \text{式(14.7) のとき}\end{aligned} \tag{14.8}$$

と書くことができる．したがって式(14.8) と式(14.6) を比較すれば，式(14.7) が成り立つとき

$$E_A=E_B \tag{14.9}$$

である．$\hat{U}=\exp(\mathrm{i}\alpha\hat{T})$ を思い出せば，式(14.7) は

$$|0\rangle'=\hat{U}|0\rangle=|0\rangle \tag{14.10}$$

と等価である．したがって，真空が対称性の変換により不変に止まるのであれば，多重子構造が現れる．“隠れた”対称性の状況では反対の場合が起こる．すなわち，生成演算子 $\hat{T}$ を真空に作用させると，式(14.7)のように 0 にならずに，ほかの可能な真空になってしまう．どうしてそうなるのか，図 13.2 の酒びんポテンシャルに立ち戻って視覚に訴えることができる．このポテンシャルは隠れ

た対称性の概念にとって本質的に重要である．13.3 節で強調しておいたように，この古典的ポテンシャルの場の量子論版では，同じように可能な真空状態 $|\tilde{0}\rangle$ が無限に存在する．真空では $(\langle\tilde{0}|\hat{\phi}_1|\tilde{0}\rangle)^2+(\langle\tilde{0}|\hat{\phi}_2|\tilde{0}\rangle)^2=f^2$ である．あきらかに対称性の演算子は複素場 $\hat{\phi}=(1/\sqrt{2})(\hat{\phi}_1-\mathrm{i}\hat{\phi}_2)$ を単にある偏角（位相）だけ回転し，実効的にはひとつの真空を別の真空にうつすにすぎない．式(14.7) のように“$|0\rangle$ 状態を殺す”かわりに，演算子は単に $|\tilde{0}\rangle$ 状態をすぐ近くの $|\tilde{0}\rangle'$ 状態に動かすだけである．この場合，式(14.6) より先に進むことはできず，したがって式(14.9) を導くこともできない．

以上の議論を隠れた対称性の以前の取り扱いに関連させることは容易である．隠れた対称性は，$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle\neq 0$ であるようなある場 $\hat{\phi}$ が必要であることを強調する．式(14.2) の真空期待値をとれば

$$\langle 0|\hat{T}\hat{\phi}_A^\dagger|0\rangle-\langle 0|\hat{\phi}_A^\dagger\hat{T}|0\rangle=\langle 0|\hat{\phi}_B^\dagger|0\rangle \tag{14.11}$$

であるから，もし式(14.7)が成り立てば期待どおり $\langle 0|\hat{\phi}_B^\dagger|0\rangle=0$ である．しかし式(14.7) が成り立たないならば“Higgs”の真空 $|\tilde{0}\rangle$ が存在し，式(14.11) の左辺は 0 にならず，$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}_B^\dagger|\tilde{0}\rangle\neq 0$ と結論できる．もちろん，これは図 13.2 でモデル化されている物理を少しばかり型式的に述べたものに過ぎない．

“自発的に破れている”対称性は，こうして文字どおり真に隠されてしまう．あとから考えると，これが弱い対称群が発見されるまでにこんなに長い時間がかかった理由である．

それにもかかわらず，以下に論ずるように，弱い対称性の群の痕跡，特に質量や結合定数の間の関係（13.4 節参照，対称性がなければまったく無関係である）を，実験から追ってゆくことが可能である．さらに，大局的対称性の作る多重子の成員は，対称性が隠れているときは一般にもはや近似的にすら同じ質量を持っていないが，多重子の概念そのものはそれでも有用である．これは，対称性を局所的にしたとき，それに関連したゲージ量子は，やはり大局的対称性の多重子間の相互作用を伝達するからであって(14.3 節)，この点は顕在的な局所的非可換対称性を持つ QCD の場合と同様である．さて帯電した弱いカレントに結びついたレプトン間の遷移は，第 10，11 章で見たごとく，$\nu_e\rightleftarrows e$，$\nu_\mu\rightleftarrows\mu$ などである．これは，このような対がある群のもとで，2 重子とみなすべきことを暗示する．さらに，11.1 節で導入したクォーク·カレントは，左回りの 2 重

子 $q_{\rm L}$ で書くと非常に簡単に書けることも注目に値する．

$$q_{\rm L}=\begin{pmatrix} u \\ d_{\rm C} \end{pmatrix}_{\rm L} \tag{14.12}$$

$$j_{\rm wk}^{+}\sim \bar{q}_{\rm L}^{\tau}\tau_{+}q_{\rm L} \tag{14.13}$$

したがってもっとも簡単な可能性は，どちらの場合からも，“弱い SU(2) 群”が含まれていると考えることである．これを“弱いアイソスピン”と呼ぶ．再び強調しておきたいことは，この弱いアイソスピンは第 8 章のハドロンのアイソスピンとは区別すべきものであり，後者は $\mathrm{SU(3)_f}$ の一部であることである．弱いアイソスピンの量子数として記号 t, t_3 を用い，それぞれのレプトンに次のように割り当てる．

$$\boxed{t=\frac{1}{2}\qquad t_3=\begin{cases}+\dfrac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}\nu_{\rm e} \\ {\rm e}^{-}\end{pmatrix}_{\rm L},\ \begin{pmatrix}\nu_{\mu} \\ \mu^{-}\end{pmatrix}_{\rm L},\ \cdots} \tag{14.14}$$

ここで … は $(\nu_\tau,\ \tau^-)_{\rm L}$，あるいは将来発見されるかもしれない高次の“世代”のレプトンを表す．クォークに対しては，これに対応した順序の世代として，次のように割り当てる．

$$\boxed{t=\frac{1}{2}\qquad t_3=\begin{cases}+\dfrac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}u \\ d_{\rm C}\end{pmatrix}_{\rm L},\ \begin{pmatrix}c \\ s_{\rm C}\end{pmatrix}_{\rm L},\ \cdots} \tag{14.15}$$

ここで高次の世代として，b クォークと（おそらく）t クォーク，およびその他のクォークが含まれる．11.1 節と同じく，添字 L は，波動関数の左回りの部分のみが弱い遷移にはいってくることを表す（10.4 節および 11.1 節参照）．この理由で，弱いアイソスピンの群は普通 $\mathrm{SU(2)_L}$ と呼ばれ，弱いアイソスピンの割り当てと，それに対応する変換の性質は左回りの部分にだけ適用されることを明示する．たとえば，$\mathrm{SU(2)_L}$ 変換のもとで

$$\begin{pmatrix}\nu_{\rm e} \\ {\rm e}^{-}\end{pmatrix}_{\rm L}\to\begin{pmatrix}\nu_{\rm e} \\ {\rm e}^{-}\end{pmatrix}_{\rm L}'=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\begin{pmatrix}\nu_{\rm e} \\ {\rm e}^{-}\end{pmatrix}_{\rm L} \tag{14.16}$$

が成り立つ．隠れた対称性から予期されるとおり，これらの 2 重子は，質量がけっして縮退しない粒子の対を含むことに注意してほしい．

第 8 章の論理に従い，この $SU(2)_L$ 群を局所的位相不変性に転化すると，この群のもとで $t=1$ の多重子（3 重子）として変換する 3 つのゲージ場が導入される．ハドロンの普通のアイソスピン $SU(2)_f$ と同じように，弱いアイソ 2 重子の成員も電荷が 1 単位ずつ異なるから，2 重子の成員間の遷移に関係する 2 つのゲージ場は，電荷 ± 1 を持つ．これらの場の量子が，もちろん既述の $W^{\pm}$ ボソンであって，帯電したカレントによる遷移を伝達し，弱いアイソスピンの昇降演算子 $t_{\pm}$ と結びつく．それでは 3 重子のうちの第 3 ゲージボソンは何であろうか．この粒子は電気的に中性であって，もしこの中性ベクトル粒子を光子に結びつけることができれば，これはきわめて魅力的かつ経済的な着想であろう．これによって，弱い相互作用と電磁相互作用が統合できるからである．この種のモデルはずっと以前，Schwinger (1957) によって初めて示唆された．もちろん，W 粒子はなんらかの方法によって質量を獲得し，光子は質量を持たないままに止まっていなくてはならない．Schwinger は，ベクトルボソンを別のスカラー場および擬スカラー場としかるべく結合させて，これを達成した．これらの結合は任意であって，W 粒子の質量を予言することはできなかった．今日では，13.1 節で強調したように，W 粒子の質量は，非可換ゲージ対称性の自発的破れの場合に一般化された“Higgs”機構によって生ずるに違いないと信じられている．すぐ以下にわかるように，このメカニズムは W 粒子の質量を制約してしまうのである．

Schwinger のモデルにおける W 粒子の質量の問題は別にして，今日われわれは荷電カレントのほかに，中性カレントの弱い相互作用が存在することを知っている（第 11 章）．これらのカレントも，もとになるゲージ理論の中に包みこまなくてはならないが，自明なやり方は，$SU(2)_L$ ゲージ場 3 重子の中性成員 W^0 粒子によって中性カレントが伝達される，とすることである．このような計画は実際 Bludman (1958) によって提案されたが，再び Higgs 機構以前のことなので，W 粒子の質量は“適当に”入れざるを得なかった．しかしこのモデルでは，中性カレントは荷電カレントと同じく，純粋に左回りかつ $V-A$ の構造を持つ．現在では，中性カレントは純粋に $V-A$ ではないことが知られてい

る．そのうえ，このモデルでは光子を包みこんで弱い相互作用と電磁相互作用を統合する，という魅力的な特徴が失われている．

解決の鍵になったのはGlashow (1961)の仕事であるが，同様な着想はSalam & Ward (1964) によっても進められた．Glashowは，Schwinger-BludmanのSU(2)方式を，さらにU(1)ゲージ群を加えることによって拡張し，“SU(2)×U(1)”群の構造を考えることを提唱した．新しい可換U(1)群は，ハイパー荷を弱い相互作用に対応させた量子数，“弱いハイパー荷”に関連するもので，$SU(2)_L$が“弱いアイソスピン”に関連したことに対応する．実際Glashowは，電荷についてのGell-Mann-西島の関係式が，これらの弱い量子数についても成立すべきであると考え，公式

$$eQ = e(t_3 + y/2) \tag{14.17}$$

を提示した．Qは(eの単位で測った)電荷，t_3は弱いアイソ多重子の成員を指定する量子数，yは弱いハイパー荷である．したがって，明らかにレプトン2重子 (ν_e，e^-) などは$y=-1$を持ち，クォーク2重子 (u，d_C) などは$y=+1/3$を持つ．さてこの群をゲージ化すると，何もかも，驚くほどうまく納まるのである．荷電ベクトルボソンは前のように現れるが，今度は中性ベクトルボソンが2個現れ，両者の間で弱い中性カレントの引き起こす過程と電磁過程とを分担することになる．もちろん，$SU(2)_L \times U(1)$ゲージ群の隠れた対称性を実現するには，実際に質量を持つ中性ボソンと，同時に，質量を持たない光子を生じ得ることを証明しなくてはならない．弱い相互作用と電磁相互作用がどんな風に絡みあっているかを記述することは，次の節で行う．この節は，弱い量子数の割り当て方を総括しておいて閉じよう．

今まで触れずにきたもっとも重要な事柄は，フェルミオンの右回り部分をどうするか，ということである．ニュートリノはひとつのヘリシティー状態にしかあり得ないが，電子やミューオンはどちらのヘリシティー状態もとれる．しかし，右回り成分

$$\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_e,\ \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_\mu,\ \cdots \tag{14.18}$$

をほかの状態に結びつける弱い遷移は存在しないように思われる．したがって，右回りの成分は弱いアイソスピン群のもとですべて1重子である，と仮定する

ことは自然である．弱い荷量の関係式(14.17) を参考にすると，表 14.1 に示す量子数の割り当てが決まる．そのほかの粒子についてはのちに示す．

14.3　局所的対称性としての $SU(2)_L \times U(1)$，荷電カレントの頂点

これからは主として，もともとの Weinberg-Salam モデルのように，理論をレプトンに応用することを考える．もはやこの時点で，大局的 $SU(2)_L$ 位相不変性

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \to \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L' = \exp(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \tag{14.19}$$

を局所的不変性に拡張すること，およびこれより簡単な $U(1)_y$ 位相不変性に同じ手法を用いることに，詳しい説明はいらないであろう．単に，t および y で指定された特定の表現に適した共変微分

$$\boxed{\partial^\mu \to \hat{D}^\mu = \partial^\mu + ig\boldsymbol{t}^{(t)}\cdot\hat{\boldsymbol{W}}^\mu + i(g'/2)y\hat{B}^\mu} \tag{14.20}$$

を書き下せば十分である．基本定数 g, g' は，それぞれゲージ群の $SU(2)_L$ 部分，$U(1)_y$ 部分の弱い“荷量”である．g'項の因子 1/2 はまったく便宜にすぎない．3 個の $\hat{\boldsymbol{W}}^\mu$ は $SU(2)_L$ のゲージ場，$\hat{B}^\mu$ は新しい $U(1)_y$ のゲージ場である．したがって，電子の左回り 2 重子式(14.14) を l_e で表すと，それに対して共変微分演算子は

表 14. 1　フェルミオンに対する弱いアイソスピンとハイパー荷重の指定

	t	t_3	y	Q
ν_e, ν_μ	1/2	1/2	-1	0
e_L, μ_L	1/2	-1/2	-1	-1
e_R, μ_R	0	0	-2	-1
u_L, c_L	1/2	1/2	1/3	2/3
$(d_c)_L$, $(s_c)_L$	1/2	-1/2	1/3	-1/3
u_R, c_R	0	0	4/3	2/3
$(d_c)_R$, $(s_c)_R$	0	0	-2/3	-1/3

$$\left.\begin{array}{l}\text{左回りの}\\ \text{レプトン}\\ t=\dfrac{1}{2}\\ y=-1\end{array}\right\}\ \partial^\mu \to \hat{D}^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{W}}^\mu}{2} - \frac{\mathrm{i}g'}{2}\hat{B}^\mu \tag{14.21}$$

であり，ミューオン 2 重子 l_μ に対しても同様である．電子の波動関数の右回り部分 $\mathrm{e_R}$ に対しては，これが $t=0$ で $\mathrm{SU(2)_L}$ 変換には無関係であるから

$$\left.\begin{array}{l}\text{右回りの}\\ \text{レプトン}\\ t=0\\ y=-2\end{array}\right\}\ \partial^\mu \to \hat{D}^\mu = \partial^\mu - \mathrm{i}g'\hat{B}^\mu \tag{14.22}$$

となる．ミューオン 1 重子 μ_R に対しても同じである．

QED や QCD と同じく，共変微分を Dirac 方程式に施せば，ただちに弱いアイソ 2 重子と W 粒子の相互作用が出る．結果は

$$-\mathrm{i}g\,\bar{\hat{l}}_\mathrm{e}(\tau^a/2)\gamma_\mu \hat{l}_\mathrm{e}\hat{W}^{a\mu} \tag{14.23}$$

または

$$-\mathrm{i}g[\,\bar{\hat{l}}_\mathrm{e}(\boldsymbol{\tau}/2)\gamma_\mu \hat{l}_\mathrm{e}]\cdot\hat{\boldsymbol{W}}^\mu \tag{14.24}$$

であって，l_μ その他に対しても同じである．指標 a は 3 重子 $\boldsymbol{W}^\mu$ の $\mathrm{SU(2)_L}$ 指標 1，2，3 をとる．この指標に結びついた自由度は，いろいろ等価な形

$$W^{a\mu},\quad \boldsymbol{W}^\mu,\quad \omega^a W^\mu \tag{14.25}$$

に書くことができる．最後の表し方では，ω^a は“$\mathrm{SU(2)_L}$ の偏極ベクトル”である．この記法を用いると，相互作用式(11.12) の $\mathrm{SU(2)_L}$ 構造は，積

$$(\boldsymbol{\tau}/2)\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{14.26}$$

の形にまとめて表される．その意味は

$$\frac{1}{2^{1/2}}\left(\tau_+\frac{\omega^1-\mathrm{i}\omega^2}{2^{1/2}}+\tau_-\frac{\omega^1+\mathrm{i}\omega^2}{2^{1/2}}\right)+\frac{\tau_3}{2}\omega^3 \tag{14.27}$$

であって，$\tau_\pm=(\tau^1\pm\mathrm{i}\tau^2)/2$ は，弱いアイソ 2 重子の昇降演算子である．行列 τ_+ は遷移 $\mathrm{e^-}\to\nu_\mathrm{e}$ を引き起こし，そのとき $\mathrm{W^+}$ 粒子を吸収するかあるいは $\mathrm{W^-}$ 粒子

を放出する．組み合わせ $\omega^-=(\omega^1-\mathrm{i}\omega^2)/\sqrt{2}$ は W^- 粒子を生成するかあるいは W^+ 粒子を消滅させる．これから，$\mathrm{e}^-\to\nu_\mathrm{e}+\mathrm{W}^-$ 頂点は

$$-\frac{\mathrm{i}g}{2^{1/2}}\bar{u}(\nu)\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}u(\mathrm{e}) \tag{14.28}$$

である．これはもちろん，$q^2\ll M^2{}_\mathrm{W}$ の範囲で表 11.1 の現象論的な形と正確に一致する．したがってこの理論は，以前に行った読み換え

$$G_\mathrm{F}/2^{1/2}=g^2/8M^2{}_\mathrm{W} \tag{10.93}$$

のもとで，低エネルギー領域の荷電カレントの現象論を再現する．

中性カレントおよび電磁カレントはこれほど簡単ではない．これらはあきらかに相互作用の $W^{3\mu}$ と B^μ 部分に対応しているが，ゲージ場のひとつは質量を獲得して到達距離の短い中性の弱い力を再現し，ひとつは質量を獲得せずに光子を表さなくてはならない．中性場の精密な物理的解釈を理解するために Higgs 機構をこの特定な非可換理論に応用することを詳しく調べる必要がある．

14.4　隠れた $\mathrm{SU(2)_L}\times\mathrm{U(1)}$ ゲージ不変性

13.3節および 13.4 節において詳しく説明したように，世界の基底状態（物理的“真空”）で 0 でない期待値を持つ荷電（複素）スカラー場があれば，U(1) ゲージボソンに質量を与え，したがって理論のゲージ不変性を“隠して”しまうことができる．そこで考察された可換的 U(1) 群は，単にもっとも簡単な例で“Higgs 機構”を説明するためであって，現実の光子が 0 でない質量を持つことを望んだわけではない．ここでは，GSW 理論に必要な非可換的な場合に，この方法を拡張しなくてはならない．これははじめ Englert & Brout (1964) によって，のち Kibble（1967）によってより詳しく論じられた．

われわれは一般論を展開することは差し控え，GSW 対称性が隠れている特定の場合だけを論じよう．U(1) の場合がどうであったか，簡単なおさらいからはじめる．2 つの自由度を持つ質量のないゲージ場 $\hat{A}^\mu$ から出発して，2 つの自由度を持つ複素スカラー場 $\hat{\phi}$ (Higgs 場) を導入した．Higgs 場のひとつの自由度は質量のないゲージ場 A^μ に“食べられて”しまい（式 (13.68) 参照），質量を持つベクトル場 $\hat{A}'^\mu$ になる．もうひとつの自由度は質量を持つスカラー場

$\hat{\rho}$ として残る．（この点については第13章ではあからさまに証明はしていない．）今度の場合は，3個のゲージ場に質量を与えなくてはならない．すなわち $W^{\pm}$ 粒子および中性カレントに結びつく粒子の3つである．したがって，少なくとも3つの自由度を持つあるスカラー場を導入しなくてはならない．しかし一方，何か実効的な U(1) 対称性が破れずに残り，“その”ゲージ場は質量を持たないまま生き残って光子を表すことを保証しなくてはならない．

これを実行するもっとも簡単な方法は，第13章の荷電スカラー場を，（複素）スカラー場の2重子，すなわち $SU(2)_L$ の $t=1/2$ の多重子として変換する項に拡張することである．これは Weinberg と Salam が特に提唱したところである．このような2重子の場は，$t_3=+1/2$，$t_3=-1/2$ 状態の2つの成分を持ち，それぞれの成分はスピノールと同じく複素数である．したがって，Higgs 場は

$$t=\frac{1}{2} \qquad \hat{\phi}=\begin{pmatrix} 2^{-1/2}(\hat{\phi}_1+\mathrm{i}\hat{\phi}_2) \\ 2^{-1/2}(\hat{\phi}_3+\mathrm{i}\hat{\phi}_4) \end{pmatrix} \qquad t_3=\begin{cases} +\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{14.29}$$

の形に書け，4個の実数のスカラー場が現れる．場 $\hat{\phi}$ にも弱いハイパー荷を割り当てなくてはならないが，しばらく後回しにする．

$\hat{\phi}$ の0でない真空期待値が，3つの（もともと質量が0であった）ゲージボソンに質量を与えるメカニズムは，U(1) の場合と本質的に同じである．その要点は，真空中に誘起されたカレントがゲージ場に比例する項を含むようにもってゆき，質量を持たないベクトル場の方程式が

$$\square\hat{A}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{A}^{\nu}=\hat{j}^{\mu} \tag{14.30}$$

の形をとり，真空の遮へいカレントの条件

$$\hat{j}^{\mu}=-M^2\hat{A}^{\mu}+(\text{相互作用}) \tag{14.31}$$

が，これを質量を持つベクトル場の方程式

$$(\square+M^2)\hat{A}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{A}^{\nu}=0 \tag{14.32}$$

に変えるように誘導することである．この方程式は，この特別な真空の中を伝播するゲージ場を記述する．さらに正確に言えば，U(1) の“超伝導真空”の例を思い出して，これは，理論の顕在的なゲージ不変性を破る（あるいは“隠す”）スカラー場の真空期待値に，ある位相の選択を行うことにほかならない．もち

ろん $\hat{\phi}_0$ の位相の変化は常にゲージ場 $\hat{A}^\mu$ の位相の変化で相殺され，物理には何の違いも起こらないという意味で，実際にゲージ不変性が保たれている．事実式(13.74)，(13.75)，(13.76) によって，$\hat{\phi}$ を実数にとることができ，そのときこれに対応してゲージ場 $\hat{A}'^\mu$ は質量を持つスピン 1 の粒子の標準的な運動方程式(14.32) を満たすことを示した．$\hat{\phi}$ の位相はまさに，もともと質量を持たない $\hat{A}^\mu$ によって吸収され，質量を持つ場を生み出すような自由度であった（式(13.68) 参照）．

今度の場合は，複素アイソスピノール(14.29) の“位相”は，U(1) の場合に現れたただひとつの位相よりずっと複雑なものである．そのしかるべき形は

$$\hat{\phi}=|\hat{\phi}|\exp[\mathrm{i}\hat{\alpha}(x)] \tag{14.33}$$

を一般化して

$$\hat{\phi}=\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{\tau}/2)\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)]\begin{pmatrix}0\\ \hat{P}(x)\end{pmatrix} \tag{14.34}$$

としたものである．ここでは 3 個の実数の位相場 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\hat{\alpha}^1,\ \hat{\alpha}^2,\ \hat{\alpha}^3)$ と 1 個の実数場 $\hat{P}(x)$ が現れる．もし $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ と $\hat{P}$ が座標 x によらないとすれば，この式は単に，“負の第 3 方向”に整列しているアイソスピノールの基底 $\hat{P}$ が，アイソスピンの回転 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ によって $\hat{\phi}$ になるという主張にほかならない．$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ が x に依存するということは，任意の時空間の点で独立にアイソスピンの回転を行うことに対応し，まさに局所的位相不変性の基本原理をふまえたものである．U(1) の場合のただひとつの位相場 $\hat{\alpha}(x)$ の役割を，$\mathrm{SU(2)_L}$ の場合に肩がわりするのが 3 つの場 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ であって，$\mathrm{SU(2)_L}\times\mathrm{U(1)}$ を局所的対称性に拡張するために必要な 4 つのゲージ場のうち 3 つに，質量を与えるのである．

さて，その真空値が必要な遮へい効果を生ずる複素アイソスピノール $\hat{\phi}$ に対し，それに結びついたカレントを導入しなくてはならない．

U(1) の例では，このカレントは電磁カレント

$$\hat{j}^\mu(\hat{\phi})=\mathrm{i}q[\hat{\phi}^\dagger(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\hat{\phi}] \tag{14.35}$$

であり，∂^μ を共変微分

$$\partial^\mu\rightarrow\hat{D}^\mu\equiv\partial^\mu+\mathrm{i}q\hat{A}^\mu \tag{14.36}$$

で置き換えてゲージ不変にした（式(13.35)，(13.36) 参照）．GSW 理論の対称

群は SU(2)$_L$×U(1)$_y$ である．U(1)$_y$ に対応して式(14.35) を弱いハイパー荷に適用したものとして

$$\hat{j}_y^\mu(\hat{\phi})=\mathrm{i}(g'/2)y[\hat{\phi}^\dagger(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\hat{\phi}] \tag{14.37}$$

をとる．この段階では Higgs 場の弱いハイパー荷は決めずにおく．式(14.37) の SU(2) の場合への拡張は 8.2節で論じた．式(8.78) より弱いアイソスピノール $\hat{\phi}$ にふさわしい SU(2)$_L$ カレントは

$$\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})=\mathrm{i}g\left(\hat{\phi}^\dagger\frac{\tau^a}{2}(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\frac{\tau^a}{2}\hat{\phi}\right) \tag{14.38}$$

である．記号が示すように，これは弱いアイソスピンの全カレントへの一部の寄与を表すにすぎない．したがってアイソスピンを持つすべての粒子からの寄与がほかにあるはずである．たとえば，レプトンは

$$\bar{\hat{l}}\gamma^\mu(\tau^a/2)\hat{l} \tag{14.39}$$

の形の寄与を与える．クォークも同様である．さらに W 粒子自身も自己相互作用の項 $\hat{j}^{a\mu}(W)$ を生ずる(8.4 節，8.5 節参照)．しかし，ここではほかの寄与を考える必要はない．真空の遮へいカレントだけが関心の的で，Higgs 場 $\hat{\phi}$ だけが 0 でない真空値を持つからである．しかし，これらのカレントは，局所的 SU(2)$_L$×U(1) 位相変換で不変ではない．この点を修正するために，∂^μ を弱いハイパー荷 y を持つ $t=1/2$ の ϕ 場にふさわしい共変微係数

$$\hat{D}^\mu=\partial^\mu+\mathrm{i}g(\boldsymbol{\tau}/2)\cdot\hat{\boldsymbol{W}}^\mu+\mathrm{i}(g'/2)y\hat{B}^\mu \tag{14.40}$$

で置き換えなくてはならない．置き換えによって生ずるカレントは

$$\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})=\mathrm{i}g\left(\hat{\phi}^\dagger\frac{\tau^a}{2}(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\frac{\tau^a}{2}\hat{\phi}\right)-\frac{g^2}{2}\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}\hat{W}^{a\mu}-gg'y\hat{\phi}^\dagger\frac{\tau^a}{2}\hat{\phi}\hat{B}^\mu \tag{14.41}$$

および

$$\hat{j}_y^\mu(\hat{\phi})=\mathrm{i}\frac{g'}{2}y[\hat{\phi}^\dagger(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\hat{\phi}]-gg'y\hat{\phi}^\dagger\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\hat{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-\frac{g'^2}{2}y^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}\hat{B}^\mu \tag{14.42}$$

である．ここで SU(2) の 2 行 2 列の行列に特有な性質

$$\tau^a\tau^b+\tau^b\tau^a=2\delta^{ab} \tag{14.43}$$

を用いた．

真空の遮へいカレントを見いだすために，$\hat{\phi}$ の真空値をこの方程式の中に代

入しなくてはならない．U(1) の場合は

$$\hat{\phi}=(f/2^{1/2})\exp[\mathrm{i}\,\hat{\alpha}(x)]+\cdots \tag{14.44}$$

ととった（式(13.63) 参照）．… は真空期待値がゼロになるような場を表すが，ゲージ場 $\hat{A}^{\mu}$ が Higgs 真空中を自由に伝播することを記述する方程式には寄与しない．$\mathrm{SU(2)_L}\times\mathrm{U(1)}_y$ の場合，Weinberg にならって

$$\hat{\phi}=\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{\tau}/2)\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)]\begin{pmatrix}0\\ f/2^{1/2}\end{pmatrix} \tag{14.45}$$

ととる．ここに f は実定数で，一般には $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)\neq 0$ である．さて U(1) 位相不変性の場合は，適当なゲージをとれば一般性を失うことなく位相の場 $\hat{\alpha}(x)$ をゼロにおくことができた．非可換対称性の場合も同様であって，物理を変えることなく

$$\hat{\phi}=\begin{pmatrix}0\\ f/2^{1/2}\end{pmatrix}+\cdots\cdots \tag{14.46}$$

すなわち

$$\langle\tilde{0}|\,\hat{\phi}\,|\tilde{0}\rangle=\begin{pmatrix}0\\ f/2^{1/2}\end{pmatrix} \tag{14.47}$$

ととって，式を簡単にすることができる．しかし，一般的な 't Hooft ゲージ(13.5 節参照）の場合は，常に何かある非物理的な Higgs 場が，方程式と Feynman 規則の中に現れてくることを覚えておかなくてはならない．ここでの議論は，このような非物理的な場は存在せず，したがって物理も一番透明になる U ゲージでの話である．$\hat{\phi}$ の表式(14.46) を式(14.41)，(14.42) に代入すれば，$\mathrm{W}^{\pm}$場および中性場のひとつに質量を与える真空の遮へいカレントが得られる．

中性部分（中性セクター，カレントの特定の部分をセクターと呼ぶ習慣である）は荷電部分より少し複雑なので，しばらく $\hat{B}^{\mu}$ 場とハイパー荷のカレントを無視し，式(14.46) が $\mathrm{SU(2)_L}$ カレント

$$\hat{j}^{\,a\mu}(\hat{\phi})=\mathrm{i}g\left(\hat{\phi}^{\dagger}\frac{\tau^{a}}{2}(\partial^{\mu}\hat{\phi})-(\partial^{\mu}\hat{\phi})^{\dagger}\frac{\tau^{a}}{2}\hat{\phi}\right)-\frac{g^{2}}{2}\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi}\hat{W}^{a\mu} \tag{14.48}$$

に及ぼす効果を調べよう．ただちに

$$\hat{j}^{\,a\mu}_{\mathrm{vac}}=-g^{2}f^{2}\hat{W}^{a\mu}/4+\cdots \tag{14.49}$$

の結果を得るが，これは

$$\boxed{M_W = gf/2} \tag{14.50}$$

と同定すれば，前と同じく質量項のように見える．実際，第 8 章でくりかえし強調したように，W 場の自己相互作用 $\hat{j}^{a\mu}(\hat{W})$ があるはずだから，$\hat{W}^{a\mu}$ の場の方程式は可換的対称性の場合よりずっと複雑である．ここで考えている自発的に破れた SU(2)$_L$ の場合は，Higgs 場による余分の真空の遮へいカレントの存在により，場の方程式は

$$(\Box + M_W^2)\hat{W}^{a\mu} - \partial^\mu\partial_\nu\hat{W}^{a\nu} = \hat{j}^{a\mu}(\hat{W}) \tag{14.51}$$

となる．右辺に自己相互作用を再び導入した．今考えている U ゲージでは，式 (14.50) の M_W を，SU(2)$_L$×U(1)$_y$ GSW 理論の $W^\pm$ 粒子の質量と考えて差し支えない．

しかし，まだ話は終わらない．ゲージ場の中性カレントと電磁カレントの成分を扱わなくてはならないからである．そのためには $\hat{\phi}$ 場の y の値を考えなくてはならない．現実の超伝導体とは違って，素粒子物理の真空は，帯電した場にゼロでない真空値を与えることはできない．したがって，ゼロでない真空値を持つ $\hat{\phi}$ の成分は，電荷を持たないと要請する．

$$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ f/2^{1/2} \end{pmatrix} \tag{14.47}$$

のように選べば，これは $t_3 = -1/2$ 成分であって，関係式

$$eQ = e(t_3 + y/2) \tag{14.52}$$

から $y(\phi) = 1$ と決まる．再び，$\hat{\phi}$ が完全な SU(2)$_L$×U(1)$_y$ の弱いアイソスピンのカレント（$y=1$ とおいた式(14.41)）に与える寄与

$$\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi}) = \mathrm{i}g\left(\hat{\phi}^\dagger\frac{\tau^a}{2}(\partial^\mu\hat{\phi}) - (\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\frac{\tau^a}{2}\hat{\phi}\right) - \frac{g^2}{2}\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}\hat{W}^{a\mu}$$
$$-gg'\hat{\phi}^\dagger\frac{\tau^a}{2}\hat{\phi}\hat{B}^\mu \tag{14.53}$$

を調べよう．これで $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ を式(14.47) のように選んだ意味を完全に理解することができる．まず第一に，$\hat{j}^{a\mu}$ の中の $\hat{B}^\mu$ 項は，$a=1, 2$ に対しては真空の遮へいカレントに寄与しない．このことは，τ^1，τ^2 は対角要素を持たない，すなわち

$$(0,\ f)(\tau^1 \text{ または } \tau^2)\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}=0 \tag{14.54}$$

という事実からただちにわかる．したがって，$SU(2)_L$カレントだけにあてはまると考えた以前の考察は，実は $SU(2)_L\times U(1)_y$ 理論の $a=1,\ 2$ の成分についても正しく，$M_W=gf/2$ は物理的な $W^{\pm}$ 粒子の質量と解釈される．しかし，$a=3$ については

$$\hat{j}^{3\mu}(\hat{\phi})=-(g^2f^2/4)\hat{W}^{3\mu}+(gg'f^2/4)\hat{B}^{\mu} \tag{14.55}$$

である．これは質量を持つ粒子の方程式が

$$\Box\hat{W}^{3\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{W}^{3\nu}=-M^2\hat{W}^{3\mu}+\hat{j}^{3\mu}(\hat{W}) \tag{14.56}$$

ではなく，そのかわりに

$$\Box\hat{W}^{3\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{W}^{3\nu}=-M^2\hat{W}^{3\mu}+MM'\hat{B}^{\mu}+\hat{j}^{3\mu}(\hat{W}) \tag{14.57}$$

であることを意味する．ここに $M'=g'f/2$，$M=gf/2$ と定義した．

U(1) のゲージ場 $\hat{B}^{\mu}$ が満たす同様な方程式は，ハイパー荷のカレント（$y=1$ とおいた式(14.42)）

$$\hat{j}^{\mu}_{y}(\hat{\phi})=\mathrm{i}(g'/2)[\hat{\phi}^{\dagger}(\partial^{\mu}\hat{\phi})-(\partial^{\mu}\hat{\phi})^{\dagger}\hat{\phi}]-gg'\hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{\tau}/2)\cdot\hat{\phi}\hat{\boldsymbol{W}}^{\mu}-(g'^2/2)\hat{\phi}^{\dagger}\hat{\phi}\hat{B}^{\mu} \tag{14.58}$$

を考えれば得られる．$\hat{B}^{\mu}$ の方程式の中で真空カレントは

$$\langle\hat{j}^{\mu}_{y}(\hat{\phi})\rangle=+(gg'f^2/4)\hat{W}^{3\mu}-(g'^2f^2/4)\hat{B}^{\mu} \tag{14.59}$$

であるから，$\hat{B}^{\mu}$は次の形の方程式を満たす．

$$\Box\hat{B}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{B}^{\nu}=-M'^2\hat{B}^{\mu}+MM'\hat{W}^{3\mu} \tag{14.60}$$

$\hat{B}^{\mu}$ は可換的ゲージ場で自己相互作用を持たないから，真空中では右辺にほかの項ははいってこない．

この特定の $SU(2)_L\times U(1)$ 群の構造と $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ の選択の新しい特徴は，ゲージ場 $\hat{B}^{\mu}$ と $\hat{W}^{3\mu}$ が連立方程式を満たすことである．もっと正確に言えば，$\hat{W}^{3\mu}$ に対する式(14.44) の右辺に $\hat{B}^{\mu}$ の 1 次の項があり，$\hat{B}^{\mu}$ に対する式 (14.47) の右辺に $\hat{W}^{3\mu}$ の 1 次の項が含まれている．U(1) の真空遮へいカレントのように，普通は 1 次の項は左辺に移項されて質量項と再解釈されるが，ここで連立しているのはまさにこのような質量項である．物理的には場 $\hat{W}^{3\mu}$ や $\hat{B}^{\mu}$ は確定した質量を持たず，したがって物理的な場ではない．物理的な場を求めるには，質

量項を対角的にするような $\hat{B}^\mu$ と $\hat{W}^{3\mu}$ の線型結合を見いださなくてはならない．これは容易である．式(14.55)，(14.59) から特定の線型結合

$$g'\hat{W}^{3\mu}+g\hat{B}^\mu \tag{14.61}$$

をとれば質量項が完全に相殺することがわかる．実際，式(14.61) は方程式

$$(\Box\delta^\mu_\nu-\partial^\mu\partial_\nu)(g'\hat{W}^{3\nu}+g\hat{B}^\nu)=g'\hat{j}^{3\mu}(\hat{W}) \tag{14.62}$$

を満たすが，これは（自己相互作用によって）荷電 W 粒子と結合する質量を持たない粒子を表し，これこそどこかへ失われて久しい光子の再来であろう．

線型結合(14.49)は少し違ったように規格化する習慣である．基本定数 g および g' によって，Glashow-Weinberg 角 θ_W を定義する．

$$\tan\theta_W=g'/g \tag{14.63 a}$$

$$\cos\theta_W=g/(g^2+g'^2)^{1/2} \tag{14.63 b}$$

$$\sin\theta_W=g'/(g^2+g'^2)^{1/2} \tag{14.63 c}$$

電磁場は

$$\hat{A}^\mu=\sin\theta_W\hat{W}^{3\mu}+\cos\theta_W\hat{B}^\mu \tag{14.64}$$

と同定され，ほかのすべての場が存在しないときは式

$$(\Box\delta^\mu_\nu-\partial^\mu\partial_\nu)\hat{A}^\nu=\sin\theta_W\,\hat{j}^{3\mu}(\hat{W}) \tag{14.65}$$

を満たす．電磁場に“直交する”成分

$$\hat{Z}^\mu=\cos\theta_W\hat{W}^{3\mu}-\sin\theta_W\hat{B}^\mu \tag{14.66}$$

は，

$$\Box\hat{Z}^\mu-\partial^\mu\partial_\nu\hat{Z}^\nu=-(f^2/4)(g'^2+g^2)\hat{Z}^\mu+\cos\theta_W\,\hat{j}^{3\mu}(\hat{W}) \tag{14.67}$$

の形の質量を持つ波動方程式を満たす．これから理論は，質量

$$\boxed{M_Z=\frac{1}{2}f(g'^2+g^2)^{1/2}=M_W/\cos\theta_W} \tag{14.68}$$

を持つ中性ベクトルボソン Z^0 によって伝達される弱い中性カレントを含むことが判明する．

このように同定したうえで，一般に SU(2)$_L$×U(1) の共変微分の電荷を変えない部分を

$$\hat{D}^\mu=\partial^\mu+\mathrm{i}g\sin\theta_W\hat{A}^\mu(t_3^{(t)}+y/2)+\mathrm{i}(g/\cos\theta_W)\hat{Z}^\mu[\cos^2\theta_W t_3^{(t)}-(y/2)\sin^2\theta_W] \tag{14.69}$$

と書くことができる．これは多重度 $2t+1$, ハイパー荷 y の弱いアイソ多重子に対する演算子である．関係式

$$Q=(t_3+y/2) \tag{14.17}$$

があるから，上の $\hat{A}^\mu$ の項から，GSW 理論が予言する弱い相互作用と電磁相互作用の強さの関係

$$\boxed{g\sin\theta_{\mathrm{W}}=e} \tag{14.70}$$

が得られる．

2 つの所見を述べてこの節を終わろう．

(a)　場 $\hat{W}^{3\mu}$ と $\hat{B}^\mu$ の特別な結合(14.61) が質量を持たなくなったとき，ただちに物理的な光子と同定して疑わなかったのは，なぜであろうか．その理由は

$$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle=\begin{pmatrix}0\\ f/2^{1/2}\end{pmatrix} \tag{14.47}$$

というとり方にある．関連する対称性の操作をあからさまに破るような Higgs 場の真空値 $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ をとれば，それがどんな値であっても必然的に対応するゲージボソンは質量を獲得する．しかし，もとの対称群が単なる U(1) 位相不変性よりも大きければ，$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ のとり方によっては，この対称群の一部は壊れないことがあり得る．言い換えれば，$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ は群のある変換に対しては不変に止まり，この特別な変換を局所化した変換に結びつくゲージボソンは，質量を獲得せずにゼロのままなのである．式(14.47) の場合は，$y(\phi)=1$ だから

$$\left(\frac{y}{2}+\frac{\tau_3}{2}\right)\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle=0 \tag{14.71}$$

が成り立ち，$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ は変換

$$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle\to\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle'=\exp[\mathrm{i}\alpha(y/2+t_3^{(1/2)})]\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \tag{14.72}$$

に対して不変である．弱い相互作用の Gell-Mann- 西島の関係式 (14.17) から，$(y/2+t_3^{(1/2)})$ は $t=1/2$ の粒子に対して<u>電荷</u>の演算子であることがわかる．したがって，$\mathrm{SU(2)_L}\times\mathrm{U(1)}_y$ の変換の中で $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ を不変にするような特殊な変換は，電磁 U(1) 位相不変性にほかならない．このようにして，質量が 0 のまま残るゲージボソンは実際に光子なのである．

(b)　これまでの解析はすべてユニタリー・ゲージの場合に特有のものである

ことを，再び思い出してほしい．一般のゲージでは，質量を持つベクトルボソンの伝播関数は，隠れた対称性が存在する場合

$$\left(-g^{\mu\nu}+\frac{(1-\xi)k^{\mu}k^{\nu}}{k^2-\xi M^2}\right)(k^2-M^2)^{-1} \tag{13.92}$$

である．$k^2=\xi M^2$ における非物理的な極の存在は，Feynman 規則が非物理的な Higgs 粒子を含むことを意味する．W および Z 粒子に対する方程式 (14.51)，(14.67) は，$\xi\to\infty$ ととった特定の U ゲージで成り立つものである．

14.5 簡単な現象論的内容

ここでしばらく理論的な展開を休止して，今まで解説した GSW 理論の現象論的内容の一部を考えよう．

14.5.1 W および Z 粒子の質量

理論は 2 つのパラメーターを導入する．Higgs 場の真空期待値 f と，g，g' のいずれかである．g，g' は既知と仮定される定数 e と，式(14.70)によって結ばれている．W 粒子の質量

$$M_{\mathrm{W}}=gf/2 \tag{14.50}$$

と低エネルギー領域の現象論

$$G_{\mathrm{F}}/2^{1/2}=g^2/8M_{\mathrm{W}}^2 \tag{10.93}$$

から，f を既知の Fermi 定数で表すことができ

$$G_{\mathrm{F}}/2^{1/2}=1/2f^2 \tag{14.73}$$

となる．f の値はおよそ

$$f\simeq 246\,\mathrm{GeV} \tag{14.74}$$

である．今まで，この数値を予言する理論はなかった．もうひとつのパラメーターとして(g，g' のかわりに) θ_{W} をとってもよい．θ_{W} は Z^0 粒子の交換を含む中性カレントの過程から決まり，その結合は共変微係数式(14.69)によって与えられる．以下の 14.5.3 節を参照．ニュートリノの実験データに合わせて

$$\sin^2\theta_{\mathrm{W}}=0.226\pm0.004 \tag{14.75}$$

の値が得られている（素粒子の性質，1984 年版）．

したがって式(14.50) は

$$M_W=\left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F}\right)^{1/2}\frac{1}{\sin\theta_W}\simeq\frac{37.28}{\sin\theta_W}\,\text{GeV}\simeq 78.4\pm0.7\,\text{GeV} \tag{14.76}$$

と書かれ，式(14.68) は

$$M_Z=M_W/\cos\theta_W\simeq 89.1\pm0.7\,\text{GeV} \tag{14.77}$$

と書かれる．これら GSW 理論の精密な予言は，見かけ上まったく無関係な多くのパラメーター(この例では質量)を，ごく少数個の基本的パラメーターによって決定するという，隠れた対称性の威力を示すものである．

しかし，ここにひとつの問題がある．現在は数値的に小さなものだが，ついには大きな関心を呼ぶ問題である．式(14.76)，(14.77) は枝線図形の水準における質量の予言にすぎない．これらの質量は実は式(14.51)，(14.67) の場の方程式に現れる質量パラメーター — あるいは基礎ラグランジアンといってもよい — であって，対応する伝播関数の中に入ってくる．第 6 章において，閉線補正は伝播関数を修正する，と学んだ．GSW 理論はくりこみ可能であるから，この修正を正確に計算することができ，実際計算が行われている (Marciano, 1979, Antonelli & Maiani, 1981, Dawson *et al*., 1981, Sirlin & Marciano, 1981, Llewellyn Smith & Wheater, 1982)．ここにその計算の詳細を論ずるわけにはいかないのはあきらかであるが，第 6 章，第 9 章の議論を用いればある程度立ち入ることができる．QED や QCD のようなくりこみ可能な理論では，1 閉線の補正は普通 (無限大のくりこみを含む引き算の過程を経て) 質量および結合定数に有限の変化をもたらす．この変化は，ある固定したエネルギー点から測ってエネルギー変数に対数的に依存する．GSW 理論でも，この既知の事実と同じことが起こる．したがって実験から $\sin^2\theta_W$ の値を抽出するとき，どんなくりこみの方法を用いているか，関連する物理量の定義として用いられるエネルギー点はどこか (例えば微細構造定数 α については $q^2=0$ でとる習慣である)，について正確に知っていなくてはならない．対数的補正 (例えば 9.3 節の意味で) だけが取り入れられる精度では，式 (14.76)，(14.77) は α と $\sin\theta_W$ が "動く" パラメーターと解釈すればそのまま正しい，ということがわかっている (Marciano, 1979, Antonelli & Maiani, 1981, Dawson *et al*., 1981)．

θ_W の便利な定義のひとつとして

$$\sin^2\theta_W\equiv 1-(M_W^2/M_Z^2) \tag{14.78}$$

をとると実用的である (Sirlin & Marciano, 1981, Marciano & Sirlin, 1984). これはエネルギーの基準を M_W にとることになる. 式(14.76) はこのとき

$$M_W=\left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\sin\theta_W}\cdot[1+\delta_\alpha+\delta_M] \tag{14.79}$$

となり, δ_α は $q^2=0$ (慣習として $\alpha\sim137^{-1}$ ととられている点) から $q^2=M_W^2$ に移った場合の真空偏極の有限な補正, δ_M は W 粒子・Z 粒子・Higgs ボソンのすべての効果を表す(14.7 節参照). 軽いレプトンとクォークの 3 つの族を含むと

$$\alpha(M_W)\simeq(128)^{-1} \tag{14.80}$$

となるので

$$\delta_\alpha\simeq+0.03 \tag{14.81}$$

である. これは実は補正項の中でもっとも大きい. 一閉線図形の完全な結果†から式(14.76) は

$$M_W\simeq38.6\ \text{GeV}/\sin\theta_W \tag{14.82}$$

となる.

式(14.75) に与えられた結果は実は M_W で定義した $\sin^2\theta_W$ によったものであり, ($q^2=0$ では)

$$M_W\simeq81.2\pm0.7\ \text{GeV} \tag{14.83 a}$$

$$M_Z\simeq92.3\pm0.7\ \text{GeV} \tag{14.83 b}$$

が最終の数値である.

14.5.2　荷電カレントと W 粒子の幅

荷電カレント (あるいはより一般的に, フレイバーを変えるカレント) の頂点はすでに 14.3 節で簡単に議論した. 低エネルギーの極限では, W 粒子の交換を含む 4 フェルミオン過程の相互作用は 10.5 節で用いた形

$$\frac{e^2}{2\sin^2\theta_W}j_\mu^{C}j^{C\mu}=\frac{4G_F}{2^{1/2}}j_\mu^{C}j^{C\mu} \tag{14.84}$$

で与えられる. レプトンの弱いアイソ 2 重子に対して荷電カレントは, たとえば

† (原注) $m_t=36$ GeV, 格別の根拠なしに Higgs 粒子の質量 (14.7 節参照) を M_Z に等しいとおく.

$$j_n^{\rm C}=\bar{u}(\nu_{\rm e})\gamma_\mu\frac{(1-\gamma_5)}{2}u({\rm e}^-) \tag{14.85}$$

と表され，同様な式が $(\nu_\mu,\ \mu^-)$，$(\nu_\tau,\ \tau^-)$……の組み合わせについても成立する．クォークに対してはすでに Cabibbo-GIM メカニズムを導入した．すなわち d および s クォークは

$$\begin{pmatrix} d_{\rm C} \\ s_{\rm C} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta_{\rm C} & \sin\theta_{\rm C} \\ -\sin\theta_{\rm C} & \cos\theta_{\rm C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{14.86}$$

で置き換えられる．このほかのクォーク，電荷 $-1/3$ を持つ b クォークおよびまだ確認されていないが同じ世代の仲間として電荷 2/3 を持つ t クォークが存在するとき，この混合様式(14.86)を 3 行 3 列の行列に拡張して，新しい線型結合 d'，s'，b' を導入することができる（小林・益川，1973）．d'，s'，b' は，K^0 $\overline{\mathrm{K}^0}$ 系の **CP** を壊す効果のパラメーターを取り入れることができるが，その大きさを予言することはできない．

荷電カレントの相互作用は $\mathrm{W}\to\mathrm{e}^-\bar{\nu}_{\rm e}$ の崩壊の幅を

$$\Gamma(\mathrm{W}\to\mathrm{e}^-\bar{\nu}_{\rm e})=\frac{1}{12}\frac{g^2}{4\pi}M_{\rm W}=\frac{G_{\rm F}}{2^{1/2}}\frac{M^3{}_{\rm W}}{6\pi}\simeq\frac{23\ \mathrm{MeV}}{\sin^3\theta_{\rm W}}\simeq 214\ \mathrm{MeV} \tag{14.87}$$

と与える（問題 14.1）．ここに $\sin\theta_{\rm W}$ として式(14.75)の値を用いた．$\mu^-\bar{\nu}_\mu$，$\tau^-\bar{\nu}_\tau$ への崩壊の幅も同じであるが，Cabibbo 型の混合を無視すれば $\bar{\mathrm{u}}\mathrm{d}$，$\bar{\mathrm{c}}\mathrm{s}$，$\bar{\mathrm{t}}\mathrm{b}$ への崩壊の幅は 3 倍大きい† （カラー因子）．したがって，W 粒子の各種フェルミオンへの崩壊の幅は全体で約 2.5 GeV となろう．$\mathrm{W}\to\mathrm{e}\nu$ の分岐比は

$$B(\mathrm{e}\nu)=\Gamma(\mathrm{W}\to\mathrm{e}\nu)/\Gamma(\mathrm{total})\simeq 9\,\% \tag{14.88}$$

である．

14.5.3　中性カレントと Z^0 粒子の幅

GSW 理論では，弱い中性カレントは Z^0 粒子の交換で伝達される．レプトンおよびクォークと Z^0 粒子の結合を記述するいろいろな振幅は，中性共変微分 (14.69) の $\hat{Z}_\mu$ 部分

† (原注) しかしもし $\bar{\mathrm{t}}\mathrm{b}$ チャネルが予期通り開いているのであれば，これは相空間因子によって影響を受けるはずである．

$$\partial_\mu + \mathrm{i}e\hat{A}_\mu Q + \frac{\mathrm{i}e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}}\hat{Z}_\mu(t_3^{(t)} - \sin^2\theta_\mathrm{W} Q) \tag{14.89}$$

からただちに導くことができる．ニュートリノはすべて純左回りであって，量子数 $t=1/2$，$t_3^{(1/2)}=1/2$ を持つとすれば，

$$\langle\nu|\hat{j}_\mu^\mathrm{N}|\nu\rangle = \frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}}\frac{1}{2}\bar{u}(\nu)\gamma_\mu\frac{(1-\gamma_5)}{2}u(\nu) \tag{14.90}$$

の結果をうる．ほかの（質量を持つ）フェルミオンに対しては，

$$(t_3^{(1/2)} - \sin^2\theta_\mathrm{W} Q)(1-\gamma_5)/2 \tag{14.91}$$

に比例する左回りの結合と，

$$-\sin^2\theta_\mathrm{W}\cdot Q(1+\gamma_5)/2 \tag{14.92}$$

に比例する右回りの結合が存在する．右回りの成分は，弱いアイソ1重子と仮定しているからである．式(14.69)，(14.70) より，質量を持つフェルミオンに対しては一般に

$$\langle f|\hat{j}_\mu^\mathrm{N}|f\rangle = \frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}}\bar{u}(f)\gamma_\mu\left(c_\mathrm{L}^f\frac{1-\gamma_5}{2} + c_\mathrm{R}^f\frac{1+\gamma_5}{2}\right)u(f) \tag{14.93}$$

と書ける．ただし

$$c_\mathrm{L}^f = t_3^{(1/2)} - \sin^2\theta_\mathrm{W} Q \tag{14.94 a}$$

$$c_\mathrm{R}^f = -\sin^2\theta_\mathrm{W} Q \tag{14.94 b}$$

とおいた．あるいは同じことであるが

$$\langle f|\hat{j}_\mu^\mathrm{N}|f\rangle = \frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}}\bar{u}(f)\gamma_\mu\left(t_3^{(1/2)}\frac{1-\gamma_5}{2} - \sin^2\theta_\mathrm{W} Q\right)u(f) \tag{14.95}$$

と書いてもよい．ここで $g_\mathrm{N} = g/\cos\theta_\mathrm{W} = e/\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}$ と同定すれば，式(14.95) は以前 11.3 節に与えた諸関係式にほかならない．たとえば，量子数 $t_3^{(1/2)} = -1/2$ を持つ負に帯電したレプトンに対して，相対的な結合の強さは

$$c_\mathrm{L}^{\mathrm{e},\mu,\cdots} = -\frac{1}{2} + a, \qquad c_\mathrm{R}^{\mathrm{e},\mu,\cdots} = a \tag{14.96}$$

であり，量子数 $Q=2/3$，$t_3^{(1/2)} = +1/2$ であるクォークに対して相対的な結合の強さは

$$c_\mathrm{L}^{\mathrm{u,c},\cdots} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a, \qquad c_\mathrm{R}^{\mathrm{u,c},\cdots} = -\frac{2}{3}a \tag{14.97}$$

であり，$Q=-1/3$，$t_3^{(1/2)} = -1/2$ であるクォークに対しては

$$c_L^{d,s,\cdots}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}a, \qquad c_R^{d,s,\cdots}=+\frac{1}{3}a \tag{14.98}$$

である．ただし $a=\sin^2\theta_W$ である．ニュートリノは質量を持たないと仮定するから $c_L^\nu=1/2$, $c_R^\nu=0$ である．別の記法

$$\langle f|\,\hat{j}_\mu^N\,|f\rangle=\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\bar{u}(f)\gamma_\mu\left(\frac{c_V-c_A\gamma_5}{2}\right)u(f) \tag{14.99}$$

が時に用いられる．式(14.99) と式(14.95) を比較すれば，両者の関係は

$$c_V=t_3-2\sin^2\theta_W Q \tag{14.100}$$

$$c_A=t_3 \tag{14.101}$$

であることがわかる．

Z^0 粒子の伝播関数の中で 4 元運動量の依存性が無視できるような（小さい）q^2 の領域では，4 つのフェルミオンを含む過程の行列要素は，いつものように実効的な局所流れ積（またはカレント・カレント）相互作用の形をとる．

$$\frac{e^2}{\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W M_Z^2}j_\mu^N j^{N\mu} \tag{14.102}$$

ここでカレントは

$$j_\mu^N=\bar{u}(f)\gamma_\mu\left(c_L\frac{1-\gamma_5}{2}+c_R\frac{1+\gamma_5}{2}\right)u(f) \tag{14.103}$$

と書かれ，定数 c は質量を持たないニュートリノに対しては $c_L=1/2$, $c_R=0$, 質量を持つフェルミオンに対しては式(14.94) で与えられる．このモデルでは $M_Z\cos\theta_W=M_W$, $e/\sin\theta_W=g$ であるから，式(14.102) の因子は式(10.93) を用いて

$$g^2/M_W^2=4G_F 2^{1/2} \tag{14.104}$$

と表される．

式(14.102), (14.104), (14.84) より，$W^\pm$ および Z^0 粒子の交換を含む 4 フェルミオン過程を，実効点流れ積振幅で書いた形は

$$(4G_F/2^{1/2})(j_\mu^C j^{C\mu}+2\rho j_\mu^N j^{N\mu}) \tag{14.105}$$

となることがわかる．ここに

$$\rho=M_W^2/(M_Z^2\cos^2\theta_W) \tag{14.106}$$

とおいた．中性カレントと荷電カレントの寄与の比 ρ は $W^\pm$ および Z^0 粒子の質量によってきまる．これは $\langle\tilde{0}|\,\phi\,|\tilde{0}\rangle$ の形を仮定した結果である．式(14.47)

のとり方ではもちろん式(14.68) から $\rho=1$ である．式(14.47) とは違うとり方は問題 14.2 にあるが，そこでは $\rho\neq1$ になることがわかる．

$Z^0\to\nu\bar{\nu}$ 崩壊の幅は，式(14.87)で $g/2\sqrt{2}$ を $g/2\cos\theta_W$ で，M_W を M_Z で置き換え，式(14.75) を用いて

$$\Gamma(Z^0\to\nu\bar{\nu})=\frac{1}{24}\frac{g^2}{4\pi}\frac{M_Z}{\cos^2\theta_W}=\frac{G_F}{2^{1/2}}\frac{M_Z^3}{12\pi}\simeq\frac{91\ \mathrm{MeV}}{(\sin 2\theta_W)^3}\simeq 155\ \mathrm{MeV} \tag{14.107}$$

で与えられる．質量を持つレプトン対は c_L と c_R の項で結合するから

$$\Gamma(Z^0\to f\bar{f})=\left(\frac{|c_L^f|^2+|c_R^f|^2}{6}\right)\frac{g^2}{4\pi}\frac{M_Z}{\cos^2\theta_W} \tag{14.108}$$

となる．例えば $Z_0\to e^+e^-$ 崩壊に対しては前と同じく

$$c_L^e=-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W,\qquad c_R^e=\sin^2\theta_W \tag{14.109}$$

である．式(14.108) で $c_L^\nu=1/2$，$c_R^\nu=0$ とおけば式(14.107) に帰着する．$\sin^2\theta_W$ の値として式(14.75) をとれば

$$\Gamma(Z^0\to e^+e^-)\simeq 81\ \mathrm{MeV} \tag{14.110}$$

となる．クォークの対は式(14.97)，(14.98)に従い，かつカラー因子 3 と W 粒子と同じ Cabibbo 型の因子を持つ．分岐比は

$$\Gamma(Z^0\to e^+e^-):\Gamma(Z^0\to\nu\bar{\nu}):\Gamma(Z_0\to u\bar{u}):\Gamma(Z^0\to d\bar{d})\simeq 1:2:3.5:4.5 \tag{14.111}$$

で与えられ（問題 14.3)，全体の幅は

$$\Gamma_Z\simeq 30.4\,\Gamma(Z^0\to e^+e^-)\simeq 2.46\ \mathrm{GeV} \tag{14.112}$$

と評価される．ただし世代数は 3 とし，$\Gamma(Z^0\to t\bar{t})\simeq 0.25\,\Gamma(Z^0\to u\bar{u})$ と仮定した．QCD の補正はこの推定値を因子 $(1+\alpha_s/\pi)\simeq 1.06$（式(9.80) 参照）だけ増やす．崩壊様式 $Z_0\to e^+e^-$ の分岐比は $\Gamma(Z^0\to e^+e^-)/\Gamma_Z=0.3$ になる．

Z^0 粒子の交換によるレプトン・レプトン散乱の断面積は，$q^2\ll M_Z^2$ の場合，10.5 節と 11.2 節の方法に従って式(14.102)より計算することができる．たとえば，散乱

$$\nu_\mu e^-\to\nu_\mu e^- \tag{14.113}$$

$$\bar{\nu}_\mu e^-\to\bar{\nu}_\mu e^- \tag{14.114}$$

に効く図形は図 14.1 に示してある．さて同じ局所相互作用の極限で，$\nu_\mu e^-\to\mu^-\nu_e$ のような荷電カレントの類似の過程を考えると，式(14.28) と式(10.91) を比較して，g^2/M_W^2 を $g^2/2M_W^2$ で置き換えればよいことがわかる．しかし，ニュー

トリノの結合は，中性カレントの過程(14.113)，(14.114) に因子 1/2 を持ち込むから，もし式(14.103) の $V-A$ の部分 c_L のみが寄与するとすれば，反応(14.113)，(14.114) の断面積は，10.5 節で計算された $\nu_\mu \mathrm{e}^- \to \mu^- \nu_\mathrm{e}$ の断面積に $|c_\mathrm{L}|^2$ を乗ずれば得られる．しかし，電子の中性カレントは荷電カレントと同じく純粋に $V-A$ 型ではなく，したがって断面積は $|c_\mathrm{L}|^2$, $|c_\mathrm{R}|^2$ を含む項と，おそらくはそれらの干渉項も含むはずである．反応 (14.113) に対する断面積は

$$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}y=(2G_\mathrm{F}^2 E m_\mathrm{e}/\pi)\left[\,|c_\mathrm{L}^\mathrm{e}|^2+|c_\mathrm{R}^\mathrm{e}|^2(1-y)^2-\frac{1}{2}(c_\mathrm{R}^{\mathrm{e}*}c_\mathrm{L}^\mathrm{e}+c_\mathrm{L}^{\mathrm{e}*}c_\mathrm{R}^\mathrm{e})y m_\mathrm{e}/E\right] \quad (14.115)$$

である ('t Hooft, 1971 c)．ここで E は“実験室”系における入射ニュートリノのエネルギー，$y=(E-E')/E$，E' は同じく“実験室”系における射出ニュートリノのエネルギーである†．この式は，散乱過程 $\nu_\mu \mathrm{e}^- \to \mu^- \nu_\mathrm{e}$ の荷電カレント断面積 (10.122) と比較すべきもので，$t=-2m_\mathrm{e}Ey$ であることに注意せよ．$|c_\mathrm{L}^\mathrm{e}|^2$ の項は純 $V-A$ 型の結果(10.122)と一致する．一方，$|c_\mathrm{R}^\mathrm{e}|^2$ の項は 11.2 節で論じた $\nu\bar{q}$ 散乱と同じ因子 $(1-y)^2$ を含む．$E\gg m_\mathrm{e}$ であれば干渉項は無視してよい．反ニュートリノの反応(14.114) の断面積は，式(14.115) で c_L^e と c_R^e を交換すれば得られる．

第三のレプトン・レプトン過程

$$\bar{\nu}_\mathrm{e}\mathrm{e}^- \to \bar{\nu}_\mathrm{e}\mathrm{e}^- \quad (14.116)$$

が実験的に可能である．この場合は，Z^0 粒子を交換する図形のほかに，ただ 1 個

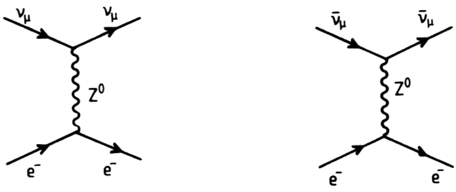


図 14.1　Z^0 粒子の交換を含むニュートリノ・電子散乱の図形

† (原注) 運動学的因子では，可能であるかぎりレプトン質量を無視してある．

の W 粒子が中間状態に存在する図形，図 14.2 がある．反応(14.116) の断面積は，式(14.115) で置き換え

$$c_L^e \to \frac{1}{2}+a, \qquad c_R^e \to a \tag{14.117}$$

を行って得られる．これらの断面積は，Fermi 結合定数 G_F ともうひとつのパラメーター $\sin^2\theta_W$ だけで表されていることを，重ねて強調しておく．実験データとの比較については，一番新しい“素粒子の性質”の総合報告を見るとよい．

14.5.4 W および Z 粒子の生成断面積

質量および分岐比が以上の諸式で与えられるような $W^\pm$ および Z^0 粒子の存在は，あきらかに GSW 理論にとっては決定的な検証になる．このような重い粒子を生成するには，重心系のエネルギーで少なくとも 100 GeV を必要とする．これは衝突型加速器でなくては無理であろう．あきらかに，Z^0 粒子をつくるもっとも清浄な方法は，図 14.3 に示すような過程

$$e^+e^- \to Z^0 \to \text{all} \tag{14.118}$$

を用いることである．しかし LEP や SLC が稼動しはじめるまでは，十分高いエネルギーを出せる電子衝突型加速器は利用できない．（しかし PETRA では $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 過程のうちに Z^0 の効果を見い出している．14.5.6 節参照）

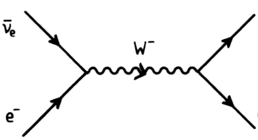


図 14.2　$\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ の 1 W 粒子消滅過程の図形

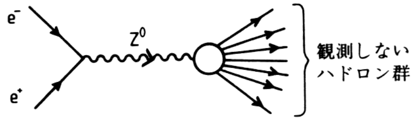


図 14.3　$e^+e^- \to Z^0 \to$ all 反応の 1 Z^0 粒子消滅過程の図形

そこでまず，CERN の陽子・反陽子衝突型加速器による W および Z^0 粒子の生成を論じよう．実際，この加速器によって W，Z 粒子が初めて発見されたのであった(UA 1 協同実験については Arnison *et al*., 1983 a，b；UA 2 協同実験については Banner *et al*.，1983b，Bagnaia *et al*., 1983)．実は，このような粒子の発見の可能性が，CERN の SPS (大型陽子加速器) を確率的冷却法を用いて陽子・反陽子衝突型加速器へ改装する主な動機であった (Rubbia *et al*., 1977，Staff of the CERN p$\bar{\mathrm{p}}$ Project，1981)．陽子・反陽子衝突型加速器による W および Z^0 粒子の生成断面積の見積もりは (例えば Quigg，1977 参照)，パートン模型によって 7.4 節の Drell-Yan 過程と同じような方法を用いて行うことができよう．図 14.4 (図 7.12 参照) のように，γ を W または Z^0 粒子で置き換え，9.4.1 節の 2 枝ジェット断面積を用いるのである．式(9.48) と同じく，質量を持たないパートンに対して部分反応の不変量 $\hat{s}$ を

$$\hat{s}=(x_1p_1+x_2p_2)^2=x_1x_2s \qquad (14.119)$$

で表す．$\sqrt{\hat{s}}=M_W\sim80$ GeV，陽子・反陽子衝突型加速器の $\sqrt{s}=540$ GeV であるので，典型的な x の値は ~0.15 である．したがって陽子中の価クォークと反陽子中の価反クォークの寄与が優先する．(Fermi 実験所のテバトロンに対しては $\sqrt{s}=1.6$ TeV，$x\simeq0.05$ となり海クォークの寄与があると考えられる.) 反応 p$\bar{\mathrm{p}}$ → $W^\pm$ + (その他すべて) のパートン模型による断面積は，$\theta_C\approx0$ とおいて

$$\sigma(\mathrm{p\bar{p}}\to W^\pm+X)=\frac{1}{3}\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\,\hat{\sigma}(x_1,\ x_2)\begin{Bmatrix}\mathrm{u}(x_1)\bar{\mathrm{d}}(x_2)+\bar{\mathrm{d}}(x_1)\mathrm{u}(x_2)\\ \bar{\mathrm{u}}(x_1)\mathrm{d}(x_2)+\mathrm{d}(x_1)\bar{\mathrm{u}}(x_2)\end{Bmatrix} \qquad (14.120)$$

で与えられる．ここに 1/3 は Drell-Yan 過程と同じカラー因子であり，部分断

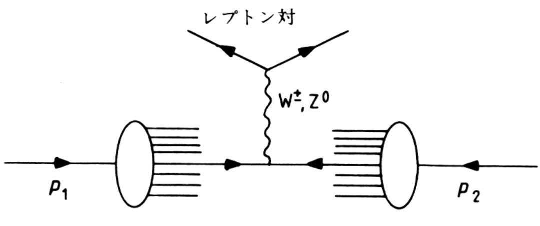


図 14.4　p$\bar{\mathrm{p}}$ 衝突による $W^\pm$ または Z^0 粒子生成のパートン模型の振幅

面積 $\hat{\sigma}$ は

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= 4\pi^2\alpha\cdot(1/4\sin^2\theta_W)\delta(\hat{s}-M_W^2) \\ &= \pi 2^{1/2} G_F M_W^2 \delta(x_1 x_2 s - M_W^2)\end{aligned} \tag{14.121}$$

で与えられる（問題 14.4）.

断面積(14.120) には QCD の補正を行わなくてはならない．主要な対数的補正は，式(14.120)の中の分布関数を Q^2 に依存する量に変え，この量は $q^2=M_W^2$ で見積もるべきである．さらに非主要対数的補正があり，これらは便宜上ある乗法因子 K として取り扱われている（Altarelli *et al*., 1979，Parisi，1980）．この場合この因子は 1.5 の程度である．したがって $\sqrt{s}=540$ GeV のとき全断面積は式(14.120) より

$$\sigma(\mathrm{W})=\sigma(\mathrm{W}^+)+\sigma(\mathrm{W}^-)\simeq 3.6\times 10^{-33}\ \mathrm{cm}^2 \tag{14.122}$$

である．同じような計算は Z^0 粒子についても行うことができ

$$\sigma(\mathrm{Z}^0)\simeq 10^{-33}\ \mathrm{cm}^2 \tag{14.123}$$

となる．式(14.122)，(14.123) に分岐比（式(14.88)，(14.112) 参照）を乗じ，$\sqrt{s}=540$ GeV では

$$\sigma(\mathrm{p\bar{p}}\to\mathrm{W}+\mathrm{X}\to\mathrm{e}\nu\mathrm{X})\simeq 0.36\ \mathrm{nb} \tag{14.124}$$

$$\sigma(\mathrm{p\bar{p}}\to\mathrm{Z}^0+\mathrm{X}\to\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-\mathrm{X})\simeq 0.03\ \mathrm{nb} \tag{14.125}$$

という結果を得る．1 nb$=10^{-33}$ cm^2 である．より詳細な評価は Altarelli *et al*. (1984，1985) が与えている．

陽子・反陽子反応の全断面積はこのエネルギーあたりでほぼ 70 nb であるから，式(14.124) は全断面積のおよそ 10^{-8}，式(14.125) はそのまた 1/10 の程度である．この比はもちろん W および Z^0 粒子の $q\bar{q}$ 過程を用いれば，分岐比が大きいから増大させることができる．しかしその過程を検出することは非常に難しい．9.4 節で論じた機構によって生じ，その断面積が式(14.124)のほぼ 10^3 もある普通の 2 枝ジェットから区別するのが不可能に近いからである．W および Z^0 粒子は極めて急速に下降する不変質量分布（図 7.13 に類似する）の端に現れるわずかな肩として見える．しかしこのような効果を分解できるようなエネルギーの分解能をジェットの熱量的測定で達成することは極めて困難である．このように分岐比では具合が悪いのであるが，レプトンの種類のほうが確実な印になる．これは以下の 14.6 節でさらに議論する．

将来は反応(14.118) が Z^0 生成のもっとも望ましい過程になると考えられる．この範囲のエネルギー領域では e^+e^- 加速器のエネルギー分解能は実験的におよそ 50 MeV で，Z^0 粒子の幅の方がずっと大きいと考えられる．断面積の山に Breit-Wigner の形を用いることができ，

$$\sigma_{Z^0}=\frac{4\pi}{s_0}3B(Z^0\to e^+e^-) \tag{14.126}$$

と書ける．ここに $s_0=M_Z^2$ で，B は分岐比 $\Gamma(Z^0\to e^+e^-)/\Gamma(Z^0\to \text{all})$ である．Z^0 生成の最高点では

$$\frac{\sigma_{Z^0}}{\sigma_{\text{QED}}}=\frac{9}{\alpha^2}B(Z^0\to e^+e^-) \tag{14.127}$$

で，これはおよそ 5,000 の因子である．ルミノシティ（加速器の明るさ）$\sim 10^{32}$ $\text{cm}^{-2}\,\text{s}^{-1}$ より，最高点では毎秒およそ 5 個内外の Z^0 粒子が背景に埋もれてしまわないで観測される，という含みになる．(輻射補正の効果はこの見積りをおよそ 1/2 に減ずるかもしれない．例えば Ellis, 1979, Llewellyn Smith, 1979 参照.) 統計性の高い結果が得られれば，弱い中性カレントとフェルミオンとの結合を詳細に決めることができるはずである．

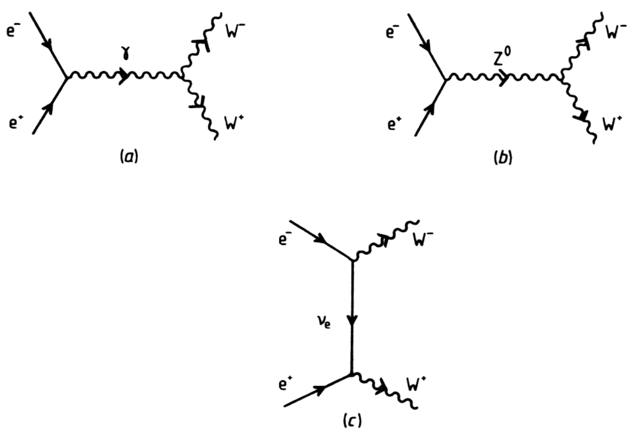


図 14.5　最低次で反応 $e^+e^-\to W^+W^-$ に寄与する図形 (*a*) 1 光子消滅過程 (*b*) 1 Z^0 粒子消滅過程 (*c*) ν_e 交換過程

反応 $e^+e^- \to W^+W^-$ には特に大きな関心が寄せられている．これには図 14.5 の 3 つの図形が重要な寄与をするが，これらの図形に含まれる結合定数の間には，基礎にあるゲージ対称性で予言される決まった関係がある．これらの関係によって図形同士の相殺がかなり起こることが知られている（Alles *et al.*, 1977, Sushkov *et al.*, 1975)．したがって，例えば $W^\pm$ 粒子が理論で予言される特定の磁気能率を持たない（以下の 14.7 節参照）とか，ZWW 頂点が理論値と異なるとかであれば，断面積はずっと大きくなるであろう．したがってこの断面積は，直接にゲージの構造を検証するのである．

14.5.5　$W^\pm$ 粒子の崩壊における荷電の非対称性

式(14.120) で簡単な価クォークの物理像が成り立つようなエネルギーでは，14.3 節で述べた $V-A$ 型の基本的結合から，W^+ 粒子は陽子の中の左回りの u クォークの消滅，および反陽子の中の右回りの $\bar{d}$ 反クォークによって創られる．$W^+ \to e^+\nu_e$ 崩壊では，右回りの e^+ と左回りの ν_e が放出される．図 14.6 を参照すると，角運動量の保存によって e^+ の生成は反陽子の方向に行われるが，陽子の方向と平行ならば禁止される．同様に，$W^- \to e^-\bar{\nu}_e$ 崩壊では e^- は陽子の方向に放出される．(これらの考察は νq および $\bar{\nu}q$ 散乱に関する 11.2 節の所説とまったく平行している．) 実際の角分布は $f_1\bar{f}_2 \to f_3\bar{f}_4$ の形の過程であるから式 (11.23 b) から推察され，$(1+\cos\theta)^2$ に比例する．ここに θ は e^- と陽子($W^- \to e^-\bar{\nu}_e$ の場合）あるいは e^+ と反陽子（$W^+ \to e^+\nu_e$ の場合）の間の角である．

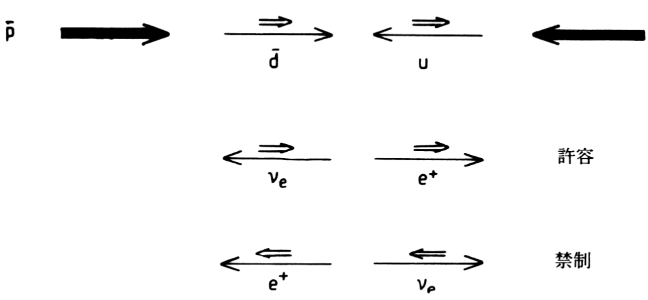


図 14.6　W^+ 粒子の崩壊に伴うレプトン放出の優先的方向

14.5.6　電弱干渉効果

DESY (ドイツ電子シンクロトロン実験所) の PETRA e^+e^- 貯蔵リングは実 Z^0 粒子を生成するにはエネルギーが足りないが，Z^0 粒子の "尻尾" の効果は図 14.7 (*a*) の標準的な QED 過程 (1 光子消滅) と図 14.7 (*b*) の GSW 過程 (1 Z^0 粒子消滅) の干渉の結果として観測することができる．現在到達できるおもな結果は

$$A=(N_F-N_B)/(N_F+N_B) \tag{14.128}$$

で定義された前方・後方の非対称度である．$N_F(N_B)$ は入射 e^+ の方向に対して正電荷のレプトンが前方 (後方) の半球内に表れる事象の数である．図 14.7 の Born 図形からは

$$A=-\left(\frac{3}{2}c_A^e c_A^\mu \mathrm{Re}\chi+3c_V^e c_V^\mu c_A^e c_A^\mu|\chi|^2\right)/R_{\mu\mu} \tag{14.129}$$

$$R_{\mu\mu}=1-2c_V^e c_V^\mu \mathrm{Re}\chi+(c_V^{e2}+c_A^{e2})(c_V^{\mu 2}+c_A^{\mu 2})|\chi|^2 \tag{14.130}$$

$$\chi=s/[4\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W(M_Z^2-s-iM_Z\Gamma_Z)] \tag{14.131}$$

という結果が得られている (Bundy, 1975)．s はいつものように $(p_{e^+}+p_{e^-})^2$ である．$\sin^2\theta_W\simeq 0.25$ とおくと式(14.100) より $c_V\approx 0$ となり，A は主として式(14.129)の第 1 項で支配されてしまう．$\sqrt{s}=29$ GeV では $A\approx -0.063$ である．

しかし QED だけでは小さな正の値の A しか得られない．QED では A は 1 光子消滅と 2 光子消滅過程との干渉 (荷電共役パリティーが異なる)，および図 14.7 (*a*) に対する初めの状態と終わりの状態の制動輻射補正の干渉から生ずる．実は $\sin^2\theta_W$ に影響する項を含めて (式(14.78) で定義しない限り)，すべての 1 閉線輻射補正が正しく考慮されなくてはならない．このような計算が実行

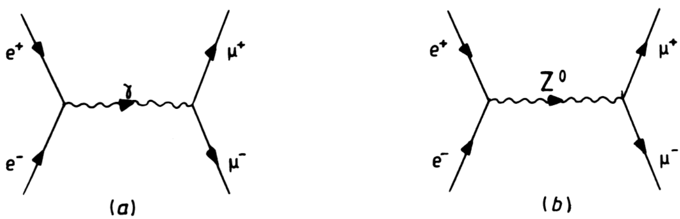


図 14.7　$e^+e^-\rightarrow\mu^+\mu^-$ に寄与する図形 (*a*) 1 光子交換過程 (*b*) 1 Z^0 粒子交換過程

されている (Wetzel, 1983, Lynn & Stuart, 1985, Böhm & Hollik, 1982, 1984, Berends *et al*., 1983, Decker *et al*., 1984). 理論と実験との比較はしたがって錯そうしており, Cashmore *et al*.(1986)によって通覧されている. 例えば, 図14.8に A と s の関係を Adeva *et al*. (1985) よりとって示す. 式(14.129)より $s \ll M_Z^2$ であれば近似的に $A \propto s$ であることに注意せよ. 図の破線は $\sin^2\theta_W = 0.22$ (M_W/M_Z で定義する) および $M_Z = 93$ GeV ととったときのGSW理論の予言である.

非対称度 A は, 実は $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ におけるパリティー非保存の直接の検証ではない. 式(14.129)から A は $c_A \to -c_A$ としても変わらない. 一方この量が真にパリティーを破る量であれば c_A の奇数幅 (線型項) を含むからである. しかし, みかけ上電磁過程であって電弱干渉によって生じたパリティー非保存の効果は, Prescott *et al*., (1978) の注目すべき実験によって観測された. 縦方向に偏極した電子が重陽子から非弾性的に散乱され, 散乱された電子束がきまったヘリシティーを持つ入射電子に対して測られた. ヘリシティーによる非対称度の違いが観測され, パリティー非保存のあきらかな兆しとなった. これ

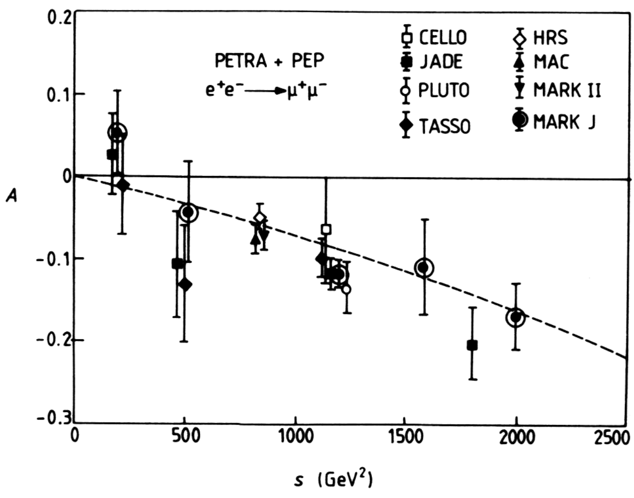


図 14.8 s に対する A の値 (Adeva *et al*., 1985)

が“電磁過程”におけるパリティー非保存の効果の最初の検証であって，対応する $\sin^2\theta_W$ の値はニュートリノのデータから決めた値によく一致している．

14.6 陽子・反陽子衝突型加速器による $W^\pm$ および Z^0 粒子の発見と粒子の諸性質

14.5.4 節ですでに示したように，陽子・反陽子衝突型加速器で W および Z 粒子を生成したもっともよい証拠はレプトン様式

$$p\bar{p} \to W^\pm X \to e^\pm \nu X \tag{14.132}$$

$$p\bar{p} \to Z^0 X \to e^+ e^- X \tag{14.133}$$

を検出することである．反応(14.132)はもっとも大きい断面積を持っており（因子 10，式(14.124)，(14.125) 参照），一番はじめに発見された（UA 1 実験，Arnison *et al*., 1983 a；UA 2 実験，Banner *et al*., 1983 a)．しかし反応(14.133) の運動学のほうが簡単であるので，まず Z^0 粒子の発見（UA 1 実験，Arnison *et al*., 1983；UA 2 実験，Bagnaia *et al*., 1983）から論じよう．

反応(14.133) を確認するしるしは，もちろん，単独でほぼ互いに反対方向に射ち出され，92 GeV 付近に山を持つ不変質量を示す e^+e^- 対の存在である．横エネルギーの大きさが適当な値以下という制限を課することで，非常にきれいな事象を分離することができる．これは e^+e^- 対が大きい質量を持つ比較的ゆっくりと運動する Z^0 粒子の崩壊で生ずるからである．図 14.9 はもともとの UA 1 事象のひとつであるが，以上のよい例である．図 14.10 は初期の UA 2 のデータ例から Z^0 事象候補の横エネルギーの分布を示す．図 14.11（Geer，1986）は 14 個ののちの UA 1 事象から描いた e^+e^- の不変質量分布である．電子のエネルギーはいずれも正確に測定され，$M_Z=93\ \mathrm{GeV}/c^2$ の最大値と実験的な質量測定の精度を折り込んだ Breit-Wigner 型の共鳴曲線が一緒に示してある．

Z^0 粒子の質量の測定結果は

$$M_Z = 93.0 \pm 1.4\,(\text{stat.}) \pm 3.2\,(\text{syst.})\ \text{GeV} \tag{14.134}$$

であった．一方，13 組の精度のよい測定ができた対から，UA 2 実験の対応する結果は

$$M_Z = 92.5 \pm 1.3\,(\text{stat.}) \pm 1.5\,(\text{syst.})\ \text{GeV} \tag{14.135}$$

であった（di Lella，1986)．どちらの場合も，系統誤差（定差）は熱量計のエ

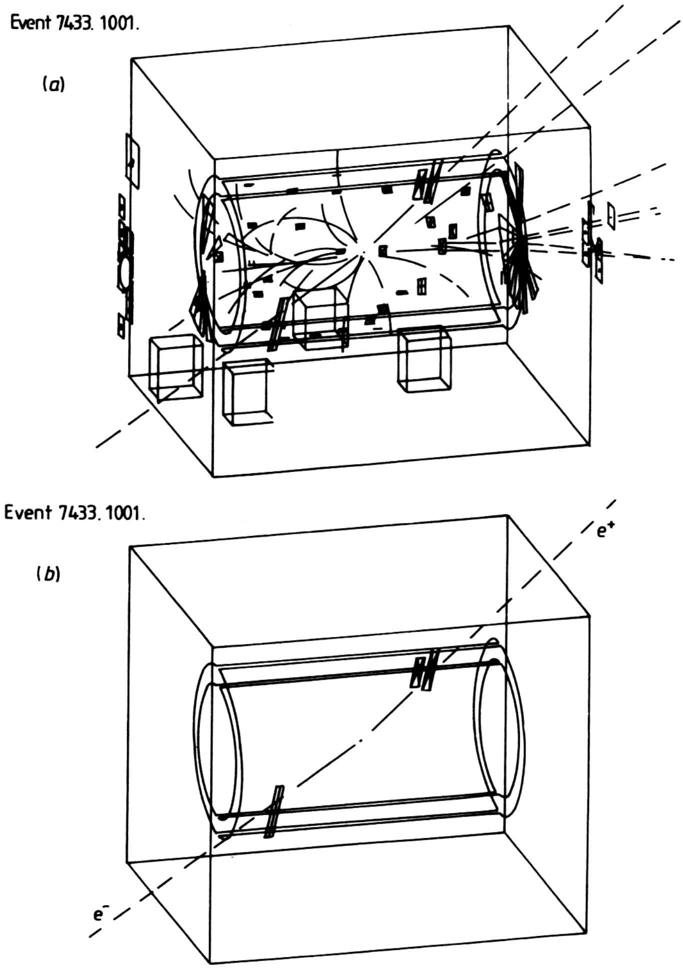


図 14.9 UA 1 実験の事象の表示（Arnison *et al*., 1983 b）．(*a*) ではひとつの頂点に属するすべての（再構成された）飛跡とカロリメーターで検出されたすべての粒子が図示してある，(*b*) では荷電粒子の飛跡については $p_T > 2$ GeV/c，カロリメーターの検出粒子については $E_T > 2$ GeV にしきい値を上げたときの粒子が図示してある．この比較的緩い制限でも電子対しか残っていない．

ネルギー値の絶対校正の不確定さを反映している．あきらかに式(14.83 b)との一致は極めてよい．

反応(14.133)の断面積は表 14.2 に掲げてある（di Lella, 1986）．誤差はかな

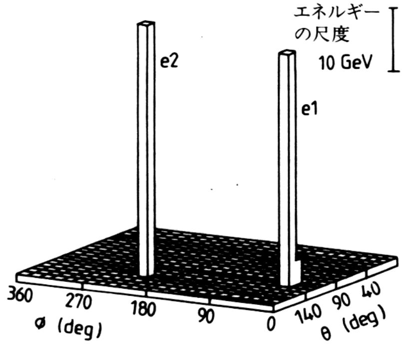


図 14.10　$Z^0 \to e^+e^-$ 事象の横エネルギーの分布．θ，ϕ 平面上の細胞にわけてある．θ，ϕ はビームの軸に対する極角および方位角．（UA 2 実験，Banner *et al*., 1983 b）

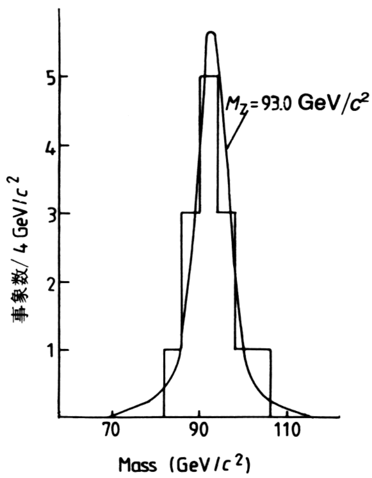


図 14.11　14 個の精度のよい $Z^0 \to e^+e^-$ 崩壊反応の不変質量の分布（UA 1 実験，Geer, 1986）

り大きいが，その範囲で2つの実験同士および理論値(14.123)は両立している．

Z^0 粒子の全体の幅 Γ_Z は興味ある量である．既知の3つの族のほかにフェルミオンの族があるとすれば，ニュートリノのみが $M_Z/2$ より際だって質量が小さいから14.5.3節より

$$\Gamma_Z \simeq (2.6+0.16\Delta N_\nu)\text{GeV} \tag{14.136}$$

が成り立つ．ΔN_ν はつけ加わるべき軽いニュートリノの数である（ν_e，ν_μ，ν_τ 以外のニュートリノ）．したがって Γ_Z が十分精密に知られれば，この式はニュートリノの種類の数（すなわち世代の数？）を決定する重要な手がかりとなる．本書執筆時においては，$p\bar{p}$ 実験の質量の分解能が予想される全体の幅（$\sim 3\ \text{GeV}/c^2$）と同じ程度であるので，式(14.136)を直接に用いるわけにはいかない．エネルギー分解能が $50\ \text{MeV}/c^2$ となるLEPやSLCが出現すれば，新しい決定的なデータを与えるであろう．[†]

さて次に $W^\pm$ 粒子に転じよう．今度は不変質量の図は書けない．$e\nu(\mu\nu)$ 様式を探しているが ν は測定できないからである．しかし $Z^0 \to e^+e^-$ 崩壊の場合と同じく，ゆっくりと運動しているW粒子は高い横エネルギーを持つ電子を分離して放出することはあきらかである．さらに，このような電子はその横エネルギーとつり合うべき大きな横エネルギー（ν に対応する）が欠けており，それは熱量計による測定で知ることができる．E_T（横エネルギー）が高くこれとつり

表 14.2　$Z \to e^+e^-$ 反応の断面積(di Lella,1986).

	σ_Z^e(pb)	
情報源	$\sqrt{s}=546$ GeV	$\sqrt{s}=630$ GeV
UA1	$41 \pm 20 \pm 6$	$85 \pm 23 \pm 13$
UA2	$110 \pm 39 \pm 9$	$52 \pm 19 \pm 4$
理論	42^{+13}_{-6}	51^{+16}_{-10}

2番目の誤差は系統誤差の不確定さを表す

[†]（訳注）1989年この実験が行われ軽いニュートリノの種類は3種と決定された．

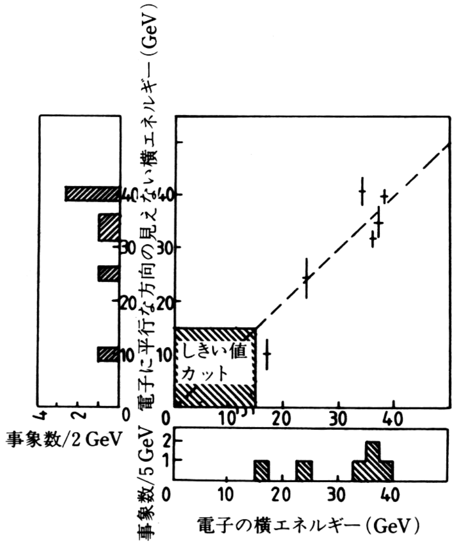


図 14.12　ジェットを伴わない W→eν 事象の最初の 6 個について，電子の横エネルギーに対する見えない横エネルギーの電子に平行な成分を図示した．(UA 1 実験，Arnison *et al*., 1983 a)

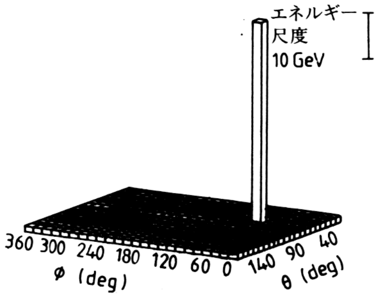


図 14.13　初期の W→eν 事象の候補について，極角 θ と方位角 ϕ の関数として描いたエネルギーの細胞分布（UA 2 実験，Banner *et al*., 1983 b)

合う E_T が欠けている (e^- と同じ位のエネルギーを持つが方位角の方向が反対) 電子，というのが初期のデータ解析に用いられた決め手であった (UA 1, Arnison *et al.*, 1983 a ; UA 2, Banner *et al.*, 1983 b)．図 14.12 は電子の横エネルギー対電子の方向に平行な欠けた横エネルギーの図であって，UA 1 での初めてのデータ (Arnison *et al.*, 1983 a) からとった．図 14.13 はただひとつ高い横エネルギーを持つ電子の例で，UA 2 の初めてのデータ (Banner *et al.*, 1983 b)からとった．これは e^- を熱量計系の中できれいに分離することの見本になっている．

$e\nu$ 対については直接不変質量の図が描けないから，W 粒子の質量の決定は Z 粒子ほど単純でない．横運動量の一部はいつもビームの管の中で失われ，その大きさを同定することはできないから，横運動量 (あるいはエネルギー) のつりあいのとれぬ部分だけが ν に帰せられる．しかし図 14.12 より，e, ν 2 つのレプトンの横エネルギーの値はおよそ 40 GeV のあたりに終点を持つようである (これはその後のより大規模なデータでも確かめられている)．これは質量 ~80 GeV/c^2 の粒子の崩壊を強く示唆する．実在，p_{eT} (e^- の横運動量) に対する事象の分布は，次の議論から容易にうなずけるように，$p_{eT} \sim \frac{1}{2}M_W$ に著しい

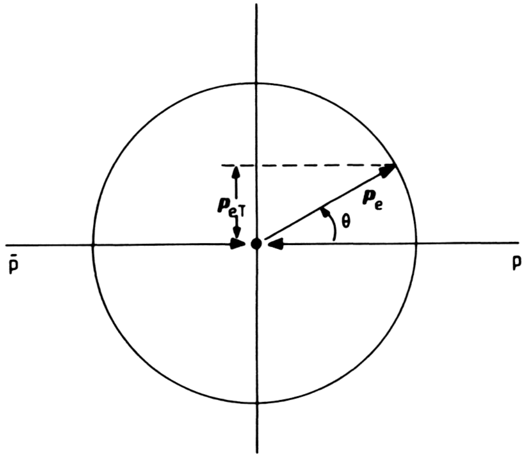


図 14.14 W→eν 崩壊の運動学

山を持つ．W粒子が静止していて崩壊したと考えよう(図 14.14)．このとき $|\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}| = \frac{1}{2}M_{\mathrm{W}}$，$|\boldsymbol{p}_{\mathrm{eT}}| = \frac{1}{2}M_{\mathrm{W}}\sin\theta$ である．したがって横運動量の分布は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p_{\mathrm{eT}}} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}p_{\mathrm{eT}}} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}\left(\frac{2p_{\mathrm{eT}}}{M_{\mathrm{W}}}\right)\left(\frac{1}{4}M_{\mathrm{W}}^2 - p_{\mathrm{eT}}^2\right)^{-1/2} \tag{14.137}$$

で与えられ，この式の終わりの因子は $p_{\mathrm{eT}} = \frac{1}{2}M_{\mathrm{W}}$ の所に山を持つ．この山は W 粒子の幅や横方向の運動でならされてしまう．初期には M_{W} の決定に式 (14.137) を用いたが，W 粒子の横運動量の感度はその代わりに

$$M_{\mathrm{T}}^2 = (E_{\mathrm{eT}} + E_{\nu\mathrm{T}})^2 - (\boldsymbol{p}_{\mathrm{eT}} + \boldsymbol{p}_{\nu\mathrm{T}})^2 \simeq 2p_{\mathrm{eT}}p_{\nu\mathrm{T}}(1-\cos\phi) \tag{14.138}$$

で定義される“横方向の質量”の分布を考えることでずっと小さくすることができる(Barger *et al*., 1983)．ここに ϕ は p_{eT} と $p_{\nu\mathrm{T}}$ の間の方位角距離である．M_{W} のいろいろな値に対して M_{T} の分布をモンテ・カルロ法で模擬し，もっとも

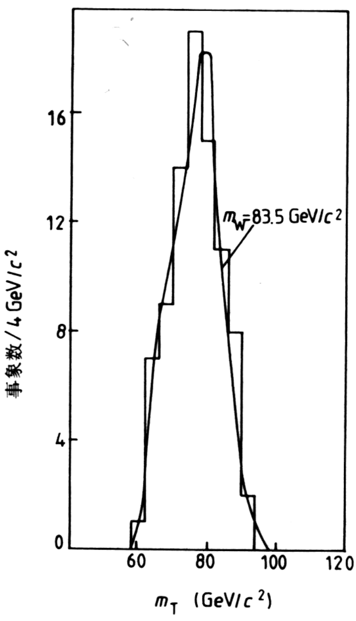


図 14.15　電子およびニュートリノの双方が 30 GeV 以上の横エネルギーをもつ 86 個の部分標本について，電子・ニュートリノの横質量の分布(UA 1 実験，Arnison *et al*., 1986)

よく合うように M_Wの最大値を決める．図 14.15 には p_{eT}, $p_{\nu T}$ が 30 GeV/c を超える 86 個の UA1 事象に対し，$M_W=83.5$ GeV/c^2 に対応する M_T の分布を示す．文献に引用されている結果は

$$\text{UA1(Geer, 1986)} \quad M_W=83.5\pm^{1.1}_{1.0}\,(\text{stat.})\pm 2.8\,(\text{syst.})\ \text{GeV} \tag{14.139}$$

$$\text{UA2(di Lella, 1986)} \quad M_W=81.2\pm 1.1\,(\text{stat.})\pm 1.3\,(\text{syst.})\ \text{GeV} \tag{14.140}$$

で，系統誤差は再び熱量計によるエネルギーの絶対測定の不確定さを反映している．これらの実験はまた

$$\left.\begin{array}{ll}\text{UA1} & \Gamma_W<6.5\ \text{GeV} \\ \text{UA2} & \Gamma_W<7.0\ \text{GeV}\end{array}\right\} \ \text{信頼水準}\quad 90\,\% \tag{14.141}$$

という幅についての結果を報告している(Geer, 1986, di Lella, 1986)．再び，実験値と予想値(14.83 a), (14.112) との一致はみごとである．

W→e$_\nu$ の断面積は表 14.3 (di Lella, 1986) に与えられている．これらの値は理論値 (Altarelli *et al*., 1984, 1985) と矛盾はしないが全体に大きく出ている．しかし理論値は構造関数の正確な形や，QCD の高次補正が知られていないため，かなり不確定な要因がある．

式(14.78) から $\sin^2\theta_W$ の値はエネルギーの尺度の系統誤差を含まずに得られる．

$$\text{UA1} \quad \sin^2\theta_W=0.194\pm 0.031(\text{stat.}) \tag{14.142}$$

$$\text{UA2} \quad \sin^2\theta_W=0.229\pm 0.030(\text{stat.}) \tag{14.143}$$

その重荷平均は

$$\sin^2\theta_W=0.212\pm 0.022(\text{stat.}) \tag{14.144}$$

表 14.3 W → **eν** 反応の断面積(di Lella,1986)

情報源	σ_W^e(nb) $\sqrt{s}$ = 546 GeV	σ_W^e(nb) $\sqrt{s}$ = 630 GeV	$r=\dfrac{\sigma_W^e(630\ \text{GeV})}{\sigma_W^e(546\ \text{GeV})}$
UA1	0.55 ± 0.08 ± 0.09	0.63 ± 0.05 ± 0.09	1.15 ± 0.19
UA2	0.50 ± 0.09 ± 0.05	0.53 ± 0.06 ± 0.05	1.06 ± 0.23
理論	$0.36^{+0.11}_{-0.05}$	$0.45^{+0.14}_{-0.08}$	1.26 ± 0.02

2 番目の誤差は系統誤差の不確定さを表す

で，ν 散乱の値(14.75) とよく一致する．式(14.139)，(14.140)の値からもまた，それぞれの実験の W 粒子および Z 粒子のデータを一緒に用いて，$\sin^2\theta_W$ の値を抽出することができる．これは値(14.144) の統計誤差を減らすが系統誤差を再導入する．結果は値(14.144) とよく一致する．

定義(14.78) を用いるとき，式(14.106) の ρ パラメーターは $M_W{}^2$ で評価したときは 1 になることを暗黙のうちに仮定している．これは式(14.106) と式(14.82) を結合することで検討できる．

$$\rho \equiv M_W^2/(M_Z^2\cos^2\theta_W) = M_W{}^2/[M_Z{}^2(1-(38.6/M_W)^2] \tag{14.145}$$

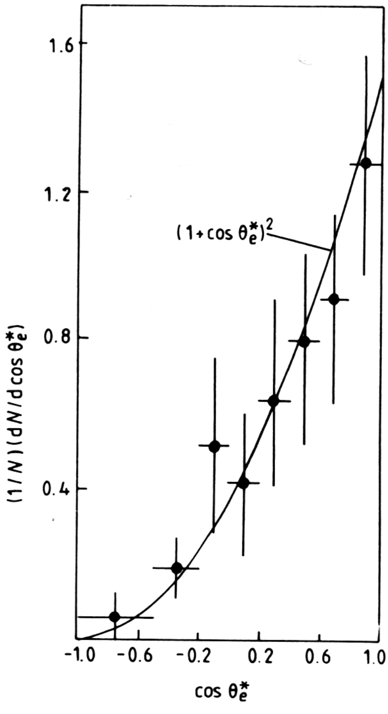


図 14.16　W 粒子の静止系において，W 粒子の崩壊に伴う陽電子（電子）の反陽子（陽子）のビーム方向に対する放出角 $\theta_e{}^*$ の分布．事象数 75，背景をとりのぞき受容のわりあいを補正してある．

文献に現れている結果は

$$\text{UA1} \quad \rho=1.028\pm0.037(\text{stat.})\pm0.019(\text{syst.}) \tag{14.146}$$

$$\text{UA2} \quad \rho=0.996\pm0.033(\text{stat.})\pm0.009(\text{syst.}) \tag{14.147}$$

である（di Lella, 1986）.

14.5.1 節で説明したように，1 閉線の輻射補正は上に含まれているが，現在の統計および系統誤差を減らす努力は，まだこのような補正を明示する必要がある所まで至っていない.（しかしより正確な UA2 のデータは，補正した値をよしとするような傾向にある.）LEP および SLC のデータが使えるようになって輻射補正の詳細が検討できるようになれば非常に興味深いであろう.

最後に，図 14.16 (Arnison *et al*., 1980) は，荷電した W 粒子の崩壊 $\mathrm{W}\to\mathrm{e}\nu$ (14.5.5 節参照) の角分布を示す. θ_{e}^* は W 粒子の静止系で $\bar{\mathrm{p}}(\mathrm{p})$ のビームに平行（反平行）な方向に対して測った $\mathrm{e}^+(\mathrm{e}^-)$ の角である. 理論的に予想される形 $(1+\cos\theta_{\mathrm{e}}^*)^2$ に非常に近い形が現れている.

まとめて言えば，これらの注目すべきかつみごとな実験結果は，14.5 節に概観したとおり，GSW 理論の主な予言を格別に信用するに足る確証を与えている.

次に，この理論の別の側面をいろいろ考えるとしよう.

14.7 GSW 理論の枝線図形に対する Feynman の規則と Higgs 部分

GSW 理論の枝線図形を作り上げるのに必要な頂点や伝播関数は，14.2 節から 14.5 節までに大部分出そろった. 荷電カレントの頂点，中性カレントの頂点は既出，ベクトルボソンの伝播関数は一般的な形式 (13.92) で表されるが，いつも $\xi=1$ というゲージで考えるとしよう. QCD の場合と同じく，3 重線型および 4 重線型のゲージボソンの頂点も考慮しなくてはならない. これらは，電弱相互作用の群の一部である非可換的 $\mathrm{SU(2)_L}$ にだけ関係し，第 8 章で考えた非可換模型と同じ群構造を持つ.

特に 3W 頂点は

$$-g\varepsilon_{abc}\omega_1^a\omega_2^b\omega_3^c[(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)(k_1-k_2)\cdot\varepsilon_3+(\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3)(k_2-k_3)\cdot\varepsilon_1 \\ +(\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1)(k_3-k_1)\cdot\varepsilon_2] \tag{14.148}$$

の形を持つ. ω_i は W 粒子の $\mathrm{SU(2)_L}$ “偏極” ベクトルを表す.

下添字 3 で指定されるボソンが，また同時に $SU(2)_L$ の指標 3 の中性ボソンである特別な場合を考えると

$$\omega_3^c = \delta^{c3} \tag{14.149}$$

である．式(14.64)，(14.66) より

$$W^{3\mu} = \sin\theta_W A^\mu + \cos\theta_W Z^\mu \tag{14.150}$$

であるから，この 3W 結合は，物理的な γWW 頂点が

$$\begin{aligned} ie(\omega_1^- \omega_2^{+} - \omega_1^+ \omega_2^-)[&(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)(k_1 - k_2)\cdot\varepsilon_\gamma + (\varepsilon_2\cdot\varepsilon_\gamma)(k_2 - k_\gamma)\cdot\varepsilon_1 \\ &+ (\varepsilon_\gamma\cdot\varepsilon_1)(k_\gamma - k_1)\cdot\varepsilon_2] \end{aligned} \tag{14.151}$$

で与えられることを示す．ここで，

$$\omega^\pm = (\omega^1 \pm i\omega^2)/2^{1/2} \tag{14.152}$$

という線型結合を導入した．$\omega_1^-\omega_2^+$ は W^+ 粒子（粒子 1）の吸収と W^- 粒子（粒子 2）の吸収，あるいは，W^-，W^+ の発生に対応する．これは GSW 理論における W 粒子の電磁場との一義的な結合であって，W 粒子の磁気能率は式(14.151) によって予言される（8.4 節参照）．

4W 頂点関数は式(8.160)と同じである．しかし話はこれで終わらない．8.4 節

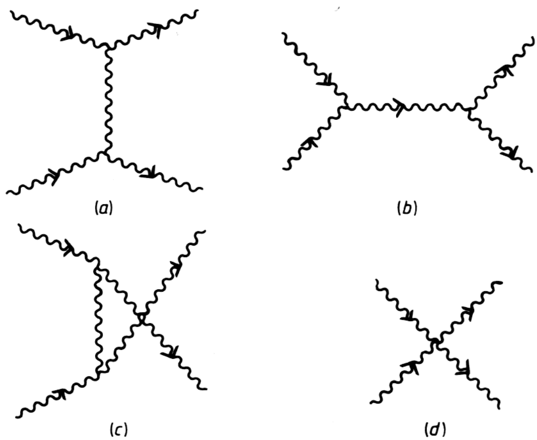


図 14.17　g^2 のけたにおいて WW 散乱に寄与する図形．(*a*) t チャンネル，(*b*) s チャンネル，(*c*) u チャンネル，(*d*) 4 W 頂点

で論じた“WW”散乱と同じように，今度は質量を持つベクトル粒子 W の WW 散乱の振幅をあえて計算しようとする熱心な読者は，思いがけぬ落とし穴に出会ってびっくりするであろう．図 14.17 に示した枝線図形の振幅の和は，まだ，ゲージ不変性が治したはずの病気を持っているのである．すなわち，縦波の偏極状態が相殺しないので，振幅の和は高エネルギー領域でユニタリティーを破ってしまう．この事実はふたたび，くりこみの問題を再燃させるように思われる．しかし，実はこれはすでに処理されているのである．W 粒子は普通の，平凡な，質量を持つベクトル粒子ではないからである．粒子の質量は，第 13 章の隠れた対称性の意味で，ゲージ不変性を尊重するように選ばれている．これは Higgs のスカラー場 ϕ が存在することを固執して実現されている．実は g のけたでベクトル粒子とスカラー場の間に結合があり，したがって WW 散乱に g^2 で寄与をするもうひとつの図形 (図 14.18) が存在する．この図形は，高エネルギー領域の望ましい挙動を回復する．

したがって理論の Higgs 部分について，より詳細な議論が必要になる．図 14.18 に示したような Higgs 結合が生じてくるのは，13.4 節で行った議論とまったく平行で，U (1) ゲージ場 $\hat{A}^\mu$ と Higgs 場の真空期待値からのずれ ρ との結合にあたるものである．$SU(2)_L \times U(1)$ の場合，複素 Higgs 2 重子の 3 つの位相の自由度は，$W^\pm$ および Z^0 粒子に質量を与えて“食べられて”しまい，ただひとつ残る Higgs 場の自由度は，真空期待値 f のまわりの場のゆらぎ σ に対応するのである．

これは第 9 章には出てこない新しい物理であるから，より簡単な U (1) の場合からはじめよう．ゲージ場がひとつも存在しない場合に，Higgs 場の性質を調べてみる．自発磁気の場合に自由エネルギー密度の数学的モデルを考えたこ

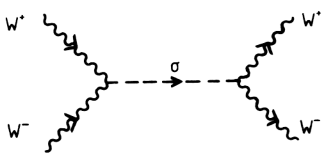


図 14.18 WW 散乱におけるスカラー Higgs 粒子の交換

とにならって，第 13 章で複素 Higgs 場 ϕ にも類似した“ポテンシャル”関数 $\hat{\phi}$ が存在しなくてはならない，と論じた．

$$\hat{V}(\hat{\phi})=-\frac{1}{2}\mu^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}+\frac{1}{2}(\mu^2/f^2)(\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi})^2 \tag{13.54}$$

これは $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle\neq 0$ という可能性をもっともらしくするために用いられた．さてこれをもう少し真剣に受け取り，$\hat{\phi}$ 場の力学を論ずるために利用しよう．$\hat{\phi}$ 場に対する完全なラグランジアンは

$$\hat{\mathscr{L}}_\phi=\hat{T}-\hat{V}=\frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}^\dagger\partial^\mu\hat{\phi}+\frac{1}{2}\mu^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}-\frac{1}{2}(\mu^2/f^2)(\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi})^2 \tag{14.153}$$

であると仮定する．Euler-Lagrange の運動方程式は

$$(\Box-\mu^2)\hat{\phi}=-(2\mu^2/f^2)(\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi})\hat{\phi} \tag{14.154}$$

となる．

これは自己相互作用を行っている質量 μ のスカラー場の方程式にほとんど等しいが，完全に等しくはない．そのような解釈を下すには，μ^2 の項の符号が正しくない．真の質量項は，$V(\phi)$ の中に $+\frac{1}{2}\mu^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}$ として現れるべきであって，$-\frac{1}{2}\mu^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}$ ではない．$\hat{\mathscr{L}}_\phi$の中でも同様である．このような真の質量項があれば，ポテンシャルは $\hat{\phi}=0$ にただひとつの極小を持ち，$\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle$ はゼロである．“質量”項 $\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}$ の符号の違いは，磁化の例で言えば，（図 13.1 参照）T_c の一方側から他方側へかわることにまさしく対応している．したがってこれは，隠れた対称性がある特徴的な兆しである．

今の場合は $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle\neq 0$ であってほしいのであるから，$\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}$ 項は質量項に対応しない．この状況はどう解釈したらよいであろうか．すでに注意したように，自発的に破れた相では，Higgs 場の残った自由度は ϕ の $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ からのゆらぎである．$\hat{\phi}$ が実数になるゲージをとり，実数の f に対して

$$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle=f/2^{1/2} \tag{13.56}$$

とおき，したがって

$$\hat{\phi}=[f+\hat{\rho}(x)]/2^{1/2} \tag{13.58}$$

ととれば，$\hat{V}$ を f と $\hat{\rho}$ で表すことができる．

$$\hat{V}=+\frac{1}{2}\mu^2\hat{\rho}^2+\frac{1}{8}\frac{\mu^2}{f^2}\hat{\rho}^4+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{f}\hat{\rho}^3-\frac{1}{8}\mu^2 f^2 \tag{14.155}$$

驚くべきことが起こっている．$\hat{\rho}^2$ の項の符号は，質量項として正しい符号を持っている．場 $\hat{\rho}$ は運動方程式

$$(\Box+\mu^2)\hat{\rho}=-\frac{3}{2}\frac{\mu^2}{f}\hat{\rho}^2-\frac{\mu^2}{2f^2}\hat{\rho}^3 \tag{14.156}$$

に従い，これは自己相互作用を行う質量 μ の真のスカラー粒子を記述する．Higgs ポテンシャル $\hat{V}(\hat{\phi})$ の中のパラメーター μ の重要な意義は，それがまさに質量であることにある．しかしその質量は，$\hat{\phi}$ の真空値からのゆらぎを記述する場の質量なのである．

以上の結果をまとめると，$\hat{\phi}$ の $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ からのゆらぎを表す物理的な Higgs 場は，質量 μ のスカラー場の自由な伝播関数

$$\mathrm{i}/(p^2-\mu^2) \tag{14.157}$$

を持つ．GSW 理論では，μ は理論の新しいパラメーターであって，物理的な Higgs ボソンの質量を表す．さて，電弱相互作用の問題に立ち帰り，この Higgs 粒子とゲージ場との相互作用を調べてみる．$\hat{\phi}$ を用いれば，弱いアイソスピンのカレントと弱いハイパー荷のカレントは

$$\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})=\mathrm{i}g\left(\hat{\phi}^\dagger\frac{\tau^a}{2}(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\frac{\tau^a}{2}\hat{\phi}\right)-\frac{g^2}{2}\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}\hat{W}^{a\mu}-gg'\hat{\phi}^\dagger\frac{\tau^a}{2}\hat{\phi}\hat{B}^\mu \tag{14.41}$$

$$\hat{j}^\mu_y(\hat{\phi})=\frac{\mathrm{i}g'}{2}\left(\hat{\phi}^\dagger(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\hat{\phi}\right)-gg'\hat{\phi}^\dagger\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\hat{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-\frac{g'^2}{2}\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}\hat{B}^\mu \tag{14.42}$$

で表される．U ゲージをとり，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)=0$（式(14.34) 参照）とおいて，

$$\hat{\phi}=\begin{pmatrix}0\\ [f+\hat{\sigma}(x)]/2^{1/2}\end{pmatrix} \tag{14.158}$$

を上の方程式に代入すれば，

$$\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})=\left(-\frac{g^2\hat{W}^{a\mu}}{4}+\frac{gg'}{4}\hat{B}^\mu\delta^{a3}\right)(f^2+2f\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^2) \tag{14.159}$$

$$\hat{j}^\mu_y(\hat{\phi})=\left(-\frac{g'^2}{4}\hat{B}^\mu+\frac{gg'}{4}\hat{W}^{3\mu}\right)(f^2+2f\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^2) \tag{14.160}$$

を得る．完全なカレントは，一般にほかの項もたくさん含むであろうが，ここではゲージ場とスカラー場 $\hat{\sigma}$ との相互作用だけに特に関心があることを，重ねて力説しておく．これらの式から，物理的な場 $\mathrm{W}^\pm$，Z^0，γ は，（自己相互作用を含むあらゆるほかの相互作用を無視して）次の方程式を満たすことが容易に

証明できる（問題 14.4）.

$$(\Box + M_W^2)\hat{W}^{\pm\mu} - \partial^\mu \partial_\nu \hat{W}^{\pm\nu} = -\frac{e}{\sin\theta_W} M_W \hat{W}^{\pm\mu} \hat{\sigma} - \frac{M_W^2}{f^2} \hat{W}^{\pm\mu} \hat{\sigma}^2 \tag{14.161}$$

$$(\Box + M_Z^2)\hat{Z}^{\mu} - \partial^\mu \partial_\nu \hat{Z}^{\nu} = -\frac{2e}{\sin 2\theta_W} M_Z \hat{Z}^{\mu} \hat{\sigma} - \frac{M_Z^2}{f^2} \hat{Z}^{\mu} \hat{\sigma}^2 \tag{14.162}$$

$$\Box \hat{A}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \hat{A}^\nu = 0 \tag{14.163}$$

光子の方程式の右辺が 0 であるのは，光子は中性の Higgs スカラー粒子とは直接に相互作用を持たないことを示す.

さてとうとう，必要な方程式をすべて得たことになる. W 粒子が“外線の σ 粒子”を散乱する行列要素をいつものように考えると[†]，WWσ 頂点は

$$\text{WW}\sigma \text{ 頂点} \qquad \frac{ie}{\sin\theta_W} M_W \varepsilon_i \cdot \varepsilon_f^* \tag{14.164}$$

ZZσ 頂点は同様に

$$\text{ZZ}\sigma \text{ 頂点} \qquad \frac{i2e}{\sin 2\theta_W} M_Z \varepsilon_i \cdot \varepsilon_f^* \tag{14.165}$$

となる. 式(14.161)，(14.162)の $\hat{\sigma}^2$ 項からは，4 枝頂点も存在することがわかる.

前と同じパラメーターで決められる Higgs 場とゲージボソンとの結合，式(14.156)で与えられる Higgs 場の自己相互作用，これらでとうとう GSW 理論の枝線図形を計算するすべての規則が得られた，と見えるかもしれない. 残念ながら，まだ話はすっかり終わってはいない. その理由はきわめて重要であるから，次の新しい節で扱おう.

14.8　フェルミオンの質量の問題

フェルミオンの質量の問題とは次のことである. フェルミオンが質量を持つとすべてのゲージ変換の不変性を壊してしまう. 波動関数の左回りの成分にのみ作用する $SU(2)_L$ も例外ではない. これは今まで展開してきたみごとな枠組みの全体にとって脅威である.

[†]（原注）30ページの脚注を参考にせよ.

まずはじめに，どうしてフェルミオンの質量がこの問題を引き起こすのか調べてみよう．ゲージ場の力学の標準的論法は，自由粒子の方程式

$$(\mathrm{i}\not\partial - m)\hat{\psi} = 0 \qquad (14.166)$$

より出発し，∂^μ を適当な共変微分で置き換え，その式が局所的位相不変性と矛盾しないようにする．GSW 理論では，フェルミオンの波動関数に働く共変微分は，左回りの成分

$$\hat{\psi}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\hat{\psi} \qquad (14.167)$$

と右回りの成分

$$\hat{\psi}_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\hat{\psi} \qquad (14.168)$$

に対して異なる．前者は $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$ の 2 重子の成員として変換するが，後者は 1 重子として変換する．しかし，自由な Dirac 方程式の中の質量項は

$$m\hat{\psi} = m\hat{\psi}_{\mathrm{L}} + m\hat{\psi}_{\mathrm{R}} \qquad (14.169)$$

と書くことができ，$\hat{\psi}_{\mathrm{L}}$ と $\hat{\psi}_{\mathrm{R}}$ は $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$ のもとで違うように変換するから，方程式(14.166)を局所的 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$ 変換のもとで共変的にする望みはない．これはちょうど，ひとつの波動方程式の中にパリティーの異なる 2 つの部分が含まれているようなもので，もちろんパリティーは方程式のよい対称性にはならない．このような“左回り”対称性は，ニュートリノのように（もし実際に質量を持たないとすれば，の話であるが）質量を持たない粒子に対してのみ，真の対称性となり得る．この結論から逃れるすべはありそうもない．

言うまでもないことだが，あまり美しくはないが逃げ道はある．逃げ道は，対称性が潜在的であり，$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \neq 0$ でないスカラー場が存在する，という事実を用いるのである．その着想は，もともと質量を持たないフェルミオンと Higgs 場との間に相互作用をいれ，質量を持たないフェルミオンが $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \neq 0$ である真空の中を伝播するときに，質量を生ずるようにすることである．これはゲージ場に質量を与えるメカニズムを思い出させるが，ひとつの重要な違いがある．フェルミオン場に質量を創出するときは，フェルミオンと Higgs 場の結合の強さを決める規準は何もなく，ただ創出された質量が観測された質量にならなくてはならない，という合わせ方だけである．したがって，現在のとこ

ろ GSW 理論では，各フェルミオンの新しい質量はそれぞれ新しいパラメーターであって，フェルミオン質量を予言するメカニズムを見い出すことは，未解決の問題である．

簡単のために，ニュートリノは実際質量を持たないと考え，レプトンのアイソ 2 重子の $t_3=-1/2$ 成分にだけ質量を与えることに話を限ろう．望ましい結合様式は，質量を持つ Dirac 方程式の中で，波動関数を $\hat{\psi}_L$ と $\hat{\psi}_R$ に分離すれば見当がつくであろう．射影演算子

$$P_R=\frac{1}{2}(1+\gamma_5) \tag{14.170}$$

を左から作用させ，

$$\{\gamma_\mu,\ \ \gamma_5\}=0 \tag{14.171}$$

であることを用いると

$$i\not{\partial}\hat{\psi}_L=m\hat{\psi}_R \tag{14.172 a}$$

$$i\not{\partial}\hat{\psi}_R=m\hat{\psi}_L \tag{14.172 b}$$

が導かれる．したがって質量を持たない自由粒子の方程式

$$i\not{\partial}\hat{\psi}_L=0 \tag{14.173 a}$$

$$i\not{\partial}\hat{\psi}_R=0 \tag{14.173 b}$$

は，右辺にアイソ 2 重子 $\hat{\phi}$ を含む相互作用項を導入し

$$\hat{\phi}\rightarrow\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle=\begin{pmatrix}0\\ f/2^{1/2}\end{pmatrix} \tag{14.174}$$

とおいたときに，質量を持つ粒子の方程式(14.172 a)，(14.172 b)になるように修正しなくてはならない．成功した処方は，$\hat{l}$ を左回りのフェルミオン 2 重子として“湯川”型相互作用を

$$i\not{\partial}\hat{\psi}_R=g_f\hat{\phi}^\dagger\,\hat{l} \tag{14.175 a}$$

$$i\not{\partial}\hat{l}=g_f\hat{\phi}\hat{\psi}_R \tag{14.175 b}$$

のように導入することである．これらの方程式が大局的に $SU(2)_L$ 共変であることはあきらかである．両辺とも $SU(2)_L$ 変換のもとで同じように変換するからである．さらに，適切な共変微分を導入して，両辺を局所的に共変にすることができる．$\hat{\phi}$ のかわりに式(14.174)の$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ を代入すると，方程式(14.175)は

$$g_f = \frac{m2^{1/2}}{f} = \frac{e}{2^{1/2}\sin\theta_W}\left(\frac{m}{M_W}\right) \tag{14.176}$$

とおいて，質量を持つ粒子の正しい方程式(14.172) となる（問題 14.5 参照）．いつものやり方で，3 重線型の湯川型類似の Higgs・フェルミオン頂点を，式(14.175) から見いだすことができる．さらに，ここでの議論では省略したが，フェルミオンとゲージ場の普通の結合もある．

GSW 理論の記述を終わるにあたって強調しておきたいことは，フェルミオン質量を導入するこの処方は，理論の最大の弱点のひとつである．この方法はまったく“その場しのぎ”のやり方であって，質量の異なるフェルミオンのそれぞれに，異なる結合定数 g_f（詳しく書けば g_e，g_μ，……，g_u，g_d，……など）を導入しなくてはならない．さらに，これら多くの g_f は今まで出あったほかの結合定数に比べて異常に小さい．もちろん，これは弱い相互作用の質量尺度 M_W とか f に比べて，フェルミオンは軽い質量を持つということの言い換えに過ぎない．現在に至るまで，これらかけ離れた質量尺度の起源について満足すべき理論はない．にもかかわらず，このような Higgs 場とフェルミオンの相互作用がなければ，質量を持つレプトンを含む理論は，局所的 $SU(2)_L \times U(1)_y$ ゲージ不変にはならないであろう．ゲージ不変にならないということは，何かある枝線図形，あるいは枝線図形の振幅の和が，高エネルギー領域でユニタリティーを壊す，ということである(12.2 節参照)．12.3 節に述べたように，そうであれば結局理論はくりこみ可能でないことになるであろう．実際，図 14.19 の図形が $e^+e^- \to W^+W^-$ 散乱の発散を相殺することを証明することができる．一般に，このような相殺が効くためには，レプトンの質量に比例する上述の相互作用が存在しなくてはならない．

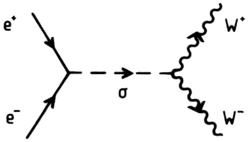


図 14.19 フェルミオン・Higgs 粒子の結合を含み，$e^+e^- \to W^+W^-$ 反応に寄与する中間 Higgs スカラー粒子 σ の図形

Higgs 粒子 H に関して現象論的に期待するところは，W 粒子や Z^0 粒子に関するものほど精密ではない．H 粒子の質量はだいたい不明である．Higgs ポテンシャル $\hat{V}$ の中のパラメーター μ は，式(14.155) を通じて H 粒子の枝線図形水準の質量を与えるが，輻射補正はこれを m_{H} に変えてしまうであろう．もし μ が 0 より小さければ，輻射補正が質量の主な原因となり，式 (14.75) の $\sin^2\theta_{\mathrm{W}}$ の値を用いれば m_{H} の下限として

$$m_{\mathrm{H}} \gtrsim 5-10\ \mathrm{GeV} \tag{14.177}$$

とおける (Linde, 1976, Weinberg, 1976)．μ の値が大きければ，式(14.74) から決めた真空値 f を固定して，Higgs 自己相互作用の値が大きくなり (式(14.156)参照)，m_{H} が 1TeV のけたであれば強い相互作用に匹敵することにもなりうるであろう (Lee *et al.*, 1977, Veltman, 1977)．そうなれば，QCD の強い相互作用を行う中間子部分と同じように，錯そうした Higgs 分光学が出現すると考えても不合理ではないと思われる．

以上および 14.7 節に論じたような，ただ一種の Higgs 粒子の場合は，その結合はすべて，現象論的に知られた質量パラメーターによってきまってしまう．最強の結合は最大質量の粒子 (例えば Z^0, W 粒子や t クォーク) に対して生ずることは明らかだから，これらの粒子は最大生成率を与えるであろう．また，トッポニウムの輻射崩壊 $t\bar{t} \to H + \gamma$ (Wilczek, 1977) や，質量関係で許容遷移であれば H 粒子を含む Z^0 粒子のいろいろな崩壊様式が，H 粒子を検出する可能な方法になるはずである．これ以上の議論は Ellis *et al*. (1976 a) や Lee *et al*.(1977) にされている．また 1978 年 LEP 夏期研究執告(LEP, 1979) や Ellis (1981) を参照するとよい．

まとめ

(1) 隠れた非可換的対称性には，縮退した多重子構造が現れない．
(2) 弱いアイソスピンと弱いハイパー荷．
(3) 局所的 $SU(2)_L \times U(1)_y$ 対称性の共変微分．
(4) 荷電カレントの頂点．
(5) Higgs 場と $\langle \tilde{0} | \hat{\phi} | \tilde{0} \rangle$ のとり方．
(6) 真空の遮へいカレント．

(7) $W^{\pm}$ 粒子の質量の創出.

(8) W^3—B 混合. 物理的な Z^0 と γ.

(9) 現象論的内容.

$W^{\pm}$, Z^0 粒子の質量.

荷電カレント.

W 粒子の幅.

中性カレント.

Z^0 粒子の幅.

$W^{\pm}$, Z^0 粒子生成の断面積.

$W^{\pm}$ 粒子の崩壊の荷電非対称性.

電弱干渉効果.

(10) $W^{\pm}$, Z^0 粒子の発見とその性質, 理論との比較.

(11) $W^{\pm}$, Z^0 粒子と Higgs スカラー σ との結合.

(12) フェルミオン質量の問題.

(13) Higgs 粒子.

問題

14.1 方程式 (14.87) を導け.

14.2 $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ に異なる形を選んだときの影響を例示する問題である.

(a) $\hat{\phi}$ を $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ の 3 重項 $(t=1)$ にとったとしよう. $\hat{\phi}$ が実数になる簡単なゲージをとり, f を実数として

$$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\f\end{pmatrix}$$

と置くことを試みる. $\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle$ の 0 でない成分は $t_3=-1$ であるから, 真空の電荷を 0 にするためには $y=2$ と指定しなくてはならない. この場合に, 14.4 節の計算を繰り返して, 光子場および Z^0 場はやはり式 (14.64), (14.66) で表されることを示せ. ただし Z^0 粒子の質量は今度は

$$M_Z = 2^{1/2} M_W / \cos\theta_W$$

で与えられる．式(14.106)のパラメーター ρ の値は，このモデルではいくらか．

(b)　また別のとり方として，$y(\phi)=0$,

$$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えると 0 でない成分は $t_3=0$ である．この場合は，W^1 と W^2 だけが質量を獲得することを示せ．

14.3　式(14.111) を導け．

14.4　式(14.161)，(14.162)，(14.163) を導け．

14.5　式(14.176) を導け．

第 6 部　枝線図形を超えて

第 15 章　4 つの話題

本書はひたすら Feynman 図形の規則を導きそれを応用することに携わってきた．図形は，QED，QCD，GSW 理論の摂動論に従って生起するいろいろな過程の振幅を表す．大部分の場合，計算はその最低次，すなわち枝線図形に限られてきた．この最後の章では 4 つの話題について非常に短かい紹介を行う．話題は，非可換ゲージ諸理論のお化け(ゴースト)，大統一理論，閉じ込め，格子ゲージ理論の 4 つであるが，いずれも今までの枠組みを異なる方向に拡張する方向になっている．

15.1　お化け閉線と非可換ゲージ理論におけるユニタリティー

前章までいろいろな箇所で，高次過程（閉線を含む図形）の振幅をどう計算するかについて触れてきた．この節の議論のために，本質的な手順を述べておく．

(i)　Feynman 図形を描く．

(ii)　それぞれの線に 4 元運動量で標識をつける．それぞれの頂点で 4 元運動量の保存を保証する．これによって，図形の中の独立な閉線には変数の（外線に与えられているのでない）4 元運動量（閉線運動量）が生ずる．

(iii)　外線には波動関数を，内線には伝播関数を，頂点には因子を対応させる．これらは粒子の種類と相互作用によってきまる．

(iv)　以上の要素を自然の順序（始状態→中間状態→終状態）に書き下し，閉線があれば閉線運動量について積分し，すべての内部自由度・Lorentz 自由度について足し合わす．

(v)　フェルミオンの作る閉線には因子 -1 を乗ずる．

今まで述べたかぎり，非可換ゲージ理論の任意の複雑な Feynman 図形につい

ても，枝線図形に対する規則がすべて見いだされていれば，振幅を書き下すことに特別な困難は生じない，と思われるであろう．しかしながら，実はそうではない．非可換ゲージ理論の完全な Feynman 規則を見いだす問題は，長い間解決できなかった．本書の目的は，枝線図形について Feynman 規則を導き，それを実用的な計算に応用することにあったのであるが，非可換ゲージ理論の閉線に付随した問題とその解決について若干の解説を加えることは重要であると思う．前章までの議論で，不用意にも事態は簡単であるという誤った印象を受けたとすれば，それを正すだけでもたいせつだからである．

問題はすべてのゲージ理論（顕在的・潜在的を問わず）にあてはまる固有のものである．それはゲージ量子を内線として含む振幅にかかわるもので，ユニタリティーが破れているように見える，ということに関係する．このユニタリティーの破れは，第 12 章に論じた問題，質量を持つベクトル粒子の理論で Born 図形が高エネルギー領域で望ましからぬ挙動を示す，という問題とはまったく異なったものであることを強調しておかなくてはならない．これから扱う問題は，たとえ質量を持たない顕在的なゲージ理論であっても起こってくる．以下ではこの場合についてあからさまに取り扱ってみよう．ごくかいつまんで言えば，質量を持たないベクトル場を共変的に処理するとき，望ましからぬ自由度がはいってくる，という問題である．ある物理的過程の全振幅に寄与する Feynman 図形の振幅の和は，摂動論のある指定された次数まで，次数ごとにユニタリティーを満たさなくてはならない．ユニタリティーは，振幅の虚数部を

$$\mathrm{Im}\langle \mathrm{f}|F|\mathrm{i}\rangle=\int\sum_{n}\langle \mathrm{f}|F|n\rangle\langle n|F^{\dagger}|\mathrm{i}\rangle \mathrm{d}\rho_{n} \tag{15.1}$$

の形の関係式によって決定する．ここに $\langle \mathrm{f}|F|\mathrm{i}\rangle$ は過程 $\mathrm{i}\to\mathrm{f}$ の振幅，和は物理的な中間状態 $|n\rangle$ の完全系にわたってとる．$|n\rangle$ はエネルギーの関数として入ってくるので，$\mathrm{d}\rho_n$ は一般の中間状態 $|n\rangle$ に対する相空間の要素を表す．ゲージ量子がこのような中間状態に現れる可能性を考えよう．ユニタリティーは物理的状態だけを考慮するから，質量を持たない物理的なゲージ場は，2 つの自由度（偏極ベクトル）しか持たない（5.1.2 項参照）．さて摂動論における“Feynman 規則”の威力のひとつは，それがあからさまに共変的なことである．しかし，質量を持たない粒子の偏極ベクトル ε_μ のうち，もともと共変性によって導入さ

れた 4 個の成分から，2 個の物理的成分を取り出す完全に共変的な方法はない．実際，ゲージ量子が Feynman 図形の中間状態に仮想粒子として現れるときは，何も物理的な 2 つの偏極状態だけには限られない（例はすぐ後で示す）．したがって，このような図形の虚数部を計算するとき，非物理的な偏極状態からの寄与が実際に生ずる機会があり，これは物理的なユニタリティーの条件にはなんら対応する部分がないから，ユニタリティーは満たされないのである．これはくりこみ不能性よりもっと基本的に深い病根であろう．

一般の場合の複雑な問題と格闘するかわりに，簡単な例でこの難点を示そう．虚数部分に 1 粒子と 1 光子を含む状態が寄与をする 2 粒子振幅（図 15.1 参照）を考える．

$$\mathrm{Im}\langle \mathrm{f}|F|\mathrm{i}\rangle=\int\sum\langle \mathrm{f}|F|\gamma \mathrm{A}\rangle\langle\gamma \mathrm{A}|F^{\dagger}|\mathrm{i}\rangle \mathrm{d}\rho_2 \tag{15.2}$$

ここで中間状態の粒子を“A”と呼び，$\mathrm{d}\rho_2$ として γA 状態の 2 体の相空間体積をとる．簡単のため，A はスピン 0 の粒子とする．式(15.2) の右辺に含まれる 1 光子振幅は，一般形 $\varepsilon_\mu F^\mu_{(\gamma)}$ を持たなくてはならない．ε_μ は光子の偏極ベクトルである．式(15.2) の中の和は光子の偏極に関するものだから，必要のない指標は書かずにおくと，次のように表せる．

$$\mathrm{Im}F=\int F^\mu_{(\gamma)}\left(\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\nu(k,\ \lambda)\right)F^{\nu\dagger}_{(\gamma)}\mathrm{d}\rho_2 \tag{15.3}$$

物理的状態 $|n\rangle$ のみがユニタリティーの和に効くのだから，λ に関する和は 2 つの横偏極状態のみについて行い，もちろん $k^2=0$ ととる．後の便宜のため，ここでは実数の偏極ベクトルを用いる．すなわち，$k=(|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ |\boldsymbol{k}|)$ の座標系で $\varepsilon(k,\ \lambda=1)=(0,\ 1,\ 0,\ 0)$，$\varepsilon(k,\ \lambda=2)=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$ である．

さてここで，F がしかるべき Feynman 図形の振幅を表すとき，式(15.3) の形が保存されるかどうか調べてみよう．まずはじめに，ユニタリティー関係 (15.3) は摂動論の各次数ごとに満たされていなくてはならないことに注意す

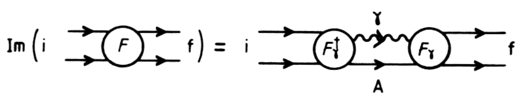


図 15.1　1 光子中間状態を含む 2 粒子→2 粒子振幅の虚数部分への寄与

る．すなわち，両辺の F を結合定数の冪で展開するとき(ふつうの Feynman 図形の展開のように)，両辺の対応する冪の係数が等しくなるべきである．光子の放出・吸収ごとに e の冪をひとつ生ずるから，式(15.3) の右辺は少なくとも e^2 の冪を含む．式(15.3) が“検証”できる最低次の過程は，図 15.2 に示したものである．さてそれでは，図 15.2 で表される振幅の虚数部は，ユニタリティーから要請される式(15.3) の形を持っているであろうか．

式(15.3)の右辺の $F_{(\gamma)}$ は，今度はそれぞれ正確に e のけたであるから，F_γ はそれぞれ図 15.3 の最低次の枝線図形で表されると考えてよい．その理由を説明しておこう．簡単のため，いわゆる Feynman ゲージ（式(13.93) で $\xi=1$ とおく）を用いると，光子の伝播関数はいつもの簡単な形

$$-g^{\mu\nu}/k^2 \tag{15.4}$$

をとる(因子 i を無視した)．既述の閉線に関する規則に従うと，図 15.2 の振幅 $B^{(1)}$ はスカラー粒子の伝播関数と光子の伝播関数の積にしかるべき頂点因子をかけ，独立な閉線運動量ひとつについて全体を積分したものである．積分変数として k をとる．Feynman 振幅の虚数部を抜き出すことは技術的な問題であって，実際ある規則が存在する(たとえば Eden *et al*.(1966)，2.9 節を参照)．今の例では図 15.2 の虚数部を計算すればよく，その結果は，光子の伝播関数 (15.4) を

$$\pi(-g_{\mu\nu})\delta(k^2)\theta(k_0) \tag{15.5}$$

で置き換えればよい．すなわち虚数部を求めるには，光子の質量は（積分変数ではなく)0 に制限され，かつエネルギーが正であるという条件で伝播関数を置き換えることになる．さらに，図 15.2 の中間状態の粒子 A の伝播関数もまた，対応する質量殻条件で置き換わる．これら 2 つの条件は，k の積分を“γA”中間状態の普通の 2 体相空間の積分に変えてしまう効果を持つ．したがって最終

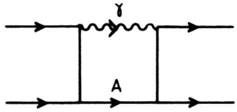


図 15.2 ユニタリティー関係 (15.3) を検証できるような最低次の図形

的に

$$\mathrm{Im}B^{(1)}=\int T^{\mu}_{(\gamma)}(-g_{\mu\nu})T^{\nu}_{(\gamma)}\mathrm{d}\rho_2 \tag{15.6}$$

となる．$T^{\mu}_{(\gamma)}$ は図 15.3 の枝線図形で表され，そのうえすべての外線運動量は質量殻の上にのっている．

このようにして，図 15.2 の箱形図形の虚数部は，中間状態 $|n\rangle$ を 1 粒子 A・1 光子 γ から成るとして，ユニタリティーの要求する式(15.3) の形を持つように見える．しかし実は，式(15.6) と式(15.3) の間には本質的な違いがある．双方の式を比べると，式(15.6) の $-g_{\mu\nu}$ の所が式(15.3) では光子の偏極ベクトルの和

$$P_{\mu\nu}=\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\nu(k,\ \lambda) \tag{15.7}$$

で置き換わっている．それではこの違いが何を意味するか調べてみよう．

一歩前進するためには，式(15.3)にはいってくる物理的偏極状態の和 $P_{\mu\nu}$ を，あからさまに計算しておくと便利である．この量はすでに 12.2 節で，過程 $e^+e^-\to\gamma\gamma$ の断面積を計算するときに出くわした．そこでは，質量を持つベクトル粒子に対応する偏極ベクトルの和から単に極限 $M\to 0$ をとるだけでは，発散して答えが得られないことを学んだ．にもかかわらず，条件

$$\varepsilon^\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\mu(k,\ \lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'},\quad \varepsilon\cdot k=0 \tag{15.8}$$

で指定される 2 つの ε を用いて，強引に $P_{\mu\nu}$ の中の和を計算することを考えてもよいかもしれない．しかし，困ったことには，条件(15.8) では $k^2=0$ のときは一意に ε を決められない．実際，条件(15.8)を満たすある ε_μ に対して，これを $\varepsilon_\mu+\lambda k_\mu$ で置き換えてもよいという事実は，5.1.2 項で見たように自由度を 2 つに減らしてしまい，条件(15.8)だけで指定された ε_μ が本質的に任意性を含むことを証明している．式(15.7)を計算するには，ε_μ を確定するためにほかの条

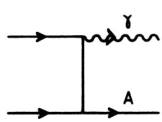


図 15.3　図 15.2 の振幅の虚数部分に入ってくる枝線図形

件を課す必要がある．標準的な選び方は（たとえば Taylor (1976)，14～15 ページを参照），条件(15.8) にさらに条件

$$t\cdot\varepsilon=0 \tag{15.9}$$

を付け加えて制約することである．ここに t はある 4 元ベクトルである．この条件は確かに ε_μ を決定し，式(15.7)を計算することを可能にするが，もちろん 2 つの難点が現れてくる．物理的な結果が t_μ に依存するかどうか．また特別な 4 元ベクトル t_μ を理論が含むことになるが，Lorentz 不変性は失われてはいないかどうか．

しばらくこの問題は伏せておいて，条件(15.8)，(15.9) から式(15.7) を計算する．結果は

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &\equiv \sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\nu(k,\ \lambda) \\ &= -g_{\mu\nu}-[t^2k_\mu k_\nu - k\cdot t(k_\mu t_\nu + k_\nu t_\mu)]/(k\cdot t)^2 \end{aligned} \tag{15.10}$$

である（問題 15.1）．しかし式(15.6) の中には，式(15.10) の中の<u>第 1 項</u>しかはいっていない．あきらかに，重要な量は

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(k,\ t) &\equiv -g_{\mu\nu}-P_{\mu\nu} \\ &= [t^2k_\mu k_\nu - k\cdot t(k_\mu t_\nu + k_\nu t_\mu)]/(k\cdot t)^2 \end{aligned} \tag{15.11}$$

である．条件 $k\cdot\varepsilon=0$ より

$$k^\mu P_{\mu\nu}=k^\nu P_{\mu\nu}=0 \tag{15.12}$$

が成り立つにもかかわらず，$k^\mu U_{\mu\nu}$ はこの性質を持って<u>いない</u>ことがわかる．実際，$k^2=0$ の性質を用いて

$$k^\mu U_{\mu\nu}=-k_\nu \tag{15.13}$$

が成り立つ．$U_{\mu\nu}$ は，$\varepsilon\cdot k\neq 0$ であるような偏極状態を含むとみなすことができる．物理的に言えば，Feynman 図形の中で内線として現れる光子は，外線光子に適用される 2 つの偏極状態より多くの状態にある，とみなされなくてはならない．$U_{\mu\nu}$ はこれら非物理的偏極状態の寄与を表している．

式(15.6) と式(15.3) との差は

$$\mathrm{Im}B^{(1)}_{\mathrm{unphys}}=\int T^\mu_{(\gamma)}[U_{\mu\nu}(k,\ t)]T^\nu_{(\gamma)}\mathrm{d}\rho_2 \tag{15.14}$$

である．この望ましからぬ寄与は，もし

$$k_\mu T^\mu_{(\gamma)}=0 \tag{15.15}$$

が成り立つならばゼロである．ここに k は光子の 4 元運動量である．一般には複数個の箱形図形（図 15.2 のタイプ）があり，したがって複数個の枝線図形がある．式(15.15) はすべての枝線図形の和に対して成り立たなくてはならない．

完全なユニタリティー関係 式(15.1)に現れるようなタイプの任意の 1 光子振幅へ，議論を拡張することは容易である．このような振幅に対して，条件

$$\boxed{k_\mu F^\mu_{(\gamma)}=0} \tag{15.16}$$

を Ward の恒等式という．振幅 $F^\mu_{(\gamma)}$ に対して条件(15.16)が成り立てば，i→f の振幅で γA の中間状態に関するかぎり，Feynman 図形についてユニタリティーが成立する．さらに，t 依存性や Lorentz 非不変性の問題などもうまく片がついてしまう．条件(15.16) はまさに 5.8.3 節で導入したもので，これがゲージ不変性に由来することを指摘しておいた．したがって，式(15.1) の中間状態 $|n\rangle$ がただ 1 個の光子を含む場合は，すべてうまくゆく．

2 個の光子を含む中間状態を考えると，重要な新しい特徴が現れてくる．再び特別な例を考え，過程 $e^+e^-\rightarrow e^+e^-$ に対する図 15.4 の 2 光子を含む特定の箱形図形を考える．この振幅は e^4 のけたであるが，この次数ではこれは 2γ 中間状態を含む唯一の図形ではない．図 15.5 に相当する過程が存在する．矛盾をおこさぬためには，両方の図形を含めなくてはならない．この和を $B^{(2)}$ と呼ぼう．

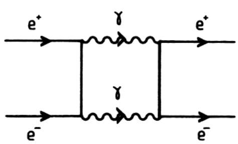


図 15.4　$e^+e^-\rightarrow e^+e^-$ の 2 光子中間状態

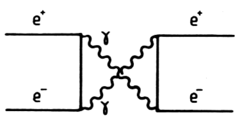


図 15.5　$e^+e^-\rightarrow e^+e^-$ の別の 2 光子図形

前と同じように，$\mathrm{Im}B^{(2)}$ への寄与は 2 つの光子を質量殻の上において求められる．光子の運動量と偏極を k_1, λ_1 および k_2, λ_2 とで表せば，$\mathrm{Im}B^{(2)}$ の中に，$T^{\mu\nu}_{(\gamma\gamma)}$ がそれぞれ図 15.6 の 2 つの枝線図形の和であり，$\mathrm{d}\rho$ が 2γ の相空間因子であるような項

$$\int T^{\mu\nu}_{(\gamma\gamma)} T^{\mu'\nu'*}_{(\gamma\gamma)}[U_{\mu\mu'}(k_1,\ \ t_1)][U_{\nu\nu'}(k_2,\ \ t_2)]\mathrm{d}\rho \tag{15.17}$$

がある．もちろん，$\mathrm{Im}B^{(2)}$ の中には，2 つの光子がそれぞれ横偏極した“正しい”（“$P\cdot P$”）の組み合わせや，混合組み合わせ（“$P\cdot U$”）もある．

物理的な中間状態だけで正しくユニタリティーを満足させるためには，式(15.17)および混合組み合わせには 0 にならなくてはならない．望ましくない項(15.17)の中で，どちらの光子も $\varepsilon\cdot k=0$ を満たす偏極状態にはないから，これが 0 になるためには

$$k_{1\mu}T^{\mu\nu}_{(\gamma\gamma)}=0 \tag{15.18}$$

および k_2 に対する同様な条件を要請しなければならない．一見したところ，条件(15.18)は条件(15.15)と違いがないように見える．すなわち図 15.6 の枝線図形の振幅の和は，ひとつの光子の偏極ベクトルをその運動量で置き換えると 0 にならなくてはならない．しかし，今や式(15.18)は，ほかの光子が $\varepsilon\cdot k\neq 0$ であっても，それぞれの光子に対して成立しなければならない．これが 2γ 中間状態に対する新しい特徴であって，非可換理論ではきわめて重要な意義を持つ．

実際，式(15.18)がほかの光子の状態いかんにかかわらずひとつの光子について成り立つことをあからさまに証明することができる．この結果は 2γ 中間状態を持つ任意のFeynman 図形に対して成立し，したがってユニタリティーは破れていない．同じことが任意個数の光子に対しても成立する．非可換ゲージ量子（グルーオン）に対しては，事情は同じでないことがわかっている．非可

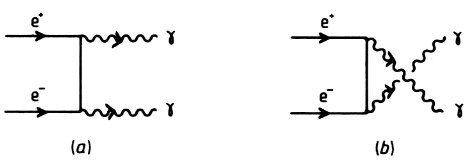


図 15.6　$e^+e^-\to\gamma\gamma$ の枝線図形（a）直接過程，（b）交差過程

換 SU(2) ゲージ対称性を持つ理論を考えよう．2 グルーオン中間状態を含む箱形図形に対して，最低次でユニタリティーの検討を行うと，グルーオンの伝播関数で前と同じく $\xi=1$ とおけば，再び条件(15.18)を得る．$T^{\mu\nu}_{(gg)}$ はすべての関連ある枝線図形の振幅の和で，図 15.7 に示してある．今度は QED では存在しなかった 3 グルーオン頂点があるから，図形は 3 つある．これに対応して，“箱形”（1 閉線）図形は図 15.8 に示すものも含まなくてはならない．確定した結果を求めるため，実線は“アイソスピノール”のフェルミオンを表すとしよう．3 個の枝線図形は，いっしょになって次の結果を与える．

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{1\mu}\varepsilon_{2\nu}T^{\mu\nu}_{(gg)} &= g^2\bar{v}(p_2)\frac{\tau^\beta}{2}\not{\varepsilon}_2 a_2{}^\beta \frac{1}{(\not{p}_1-\not{k}_1-m)}\frac{\tau^\alpha}{2}a_1^\alpha\not{\varepsilon}_1 u(p_1) \\
&+ g^2\bar{v}(p_2)\frac{\tau^\alpha}{2}a_1^\alpha\not{\varepsilon}_1\frac{1}{(\not{p}_1-\not{k}_2-m)}\frac{\tau^\beta}{2}a_2^\beta\not{\varepsilon}_2 u(p_1) \\
&+(-\mathrm{i})g^2\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}[(p_1+p_2+k_1)^\nu g^{\mu\rho}+(-k_2-p_1-p_2)^\mu g^{\rho\nu}+(-k_1+k_2)^\rho g^{\mu\nu}] \\
&\times\varepsilon_{1\mu}a_1^\alpha a_2^\beta\varepsilon_{2\nu}\frac{-1}{(p_1+p_2)^2}\bar{v}(p_2)\frac{\tau^\gamma}{2}\gamma_\rho u(p_1) \qquad (15.19)
\end{aligned}
$$

ここでグルーオンの偏極ベクトルは，Lorentz 4 元ベクトル（外部自由度）ε_μ と“SU(2) 偏極ベクトル”（内部自由度）a^α との積として書いた．さて，たとえば

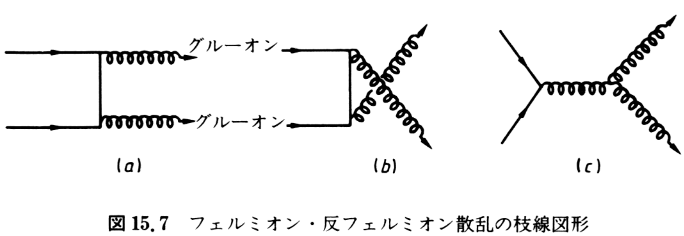


図 15.7　フェルミオン・反フェルミオン散乱の枝線図形

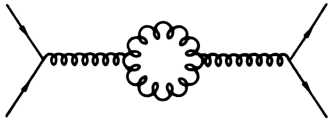


図 15.8　非可換理論で存在する $f\bar{f}\to f\bar{f}$ 過程の 4 次の追加図形

ε_1 を k_1 で置き換えよう．Dirac 方程式と質量殻条件 $p_1^2=p_2^2=m^2$，$k_1^2=k_2^2=0$ を用いると，初めの 2 項は

$$g^2\bar{v}(p_2)\not{\varepsilon}_2[\tau^\alpha/2,\quad \tau^\beta/2]u(p_1)a_1^\alpha a_2^\beta \tag{15.20}$$

$$=\mathrm{i}g^2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\bar{v}(p_2)\not{\varepsilon}_2\frac{\tau^\gamma}{2}u(p_1)a_1^\alpha a_2^\beta \tag{15.21}$$

となる．式(15.21) は τ の SU(2) 代数の結果である．式(15.19) の第 3 項は

$$-\mathrm{i}g^2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\bar{v}(p_2)\not{\varepsilon}_2\frac{\tau^\gamma}{2}u(p_1)a_1^\alpha a_2^\beta \tag{15.22}$$

$$+\mathrm{i}g^2\frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}{2k_1\cdot k_2}\bar{v}(p_2)\not{k}\frac{\tau^\gamma}{2}u(p_1)k_2\cdot\varepsilon_2 a_1^\alpha a_2^\beta \tag{15.23}$$

となる．その一部式(15.22) は確かに式(15.21) を相殺するが，一部式(15.23) は残り，これは $k_2=\varepsilon_2=0$ でなければ 0 にならない．しかし，これはすぐ以前の議論からわかるように，2 グルーオン箱形図形の虚数部にあらゆる非物理的状態が寄与しない，ということを保証するには不十分である．2 つ（もしくはそれ以上の）グルーオンを含む閉線図形は，枝線図形について成り立つ簡単な規則に従って構成すると，ユニタリティーを破ると結論せざるを得ない．

このような閉線図形に対する正しい規則は，ユニタリティーを満たすようなものでなくてはならない．違反項 式(15.23) を除くほかの方法は見当たらないようだから，閉線に対する規則は，何か余分の（単数もしくは複数の）項を簡単な枝線タイプの図形に付け加え，その付加項によって非物理的偏極状態の寄与を相殺すべきであろう，と考えざるを得ない．どのような付加項であるべきか直観的な見解を得るために，非物理的な偏極状態 $U_{\mu\nu}$ の和をとった式(15.11) に立ち帰り，特定の t を選ぶことを考えよう．$t_\mu=\bar{k}_\mu$ ととる．4 元ベクトル $\bar{k}$ は $\bar{k}=(-|\boldsymbol{k}|,\ \boldsymbol{k})$，$\boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ |\boldsymbol{k}|)$ と選ぶ．このとり方は，あきらかに $t\cdot\varepsilon(k,\lambda)=0$，$\lambda=1,\ 2$ を満たす．したがって

$$U_{\mu\nu}(k,\quad \bar{k})=(k_\mu\bar{k}_\nu+k_\nu\bar{k}_\mu)/(2|\boldsymbol{k}|^2) \tag{15.24}$$

である．ユニタリティーの要求は

$$\int T_{(gg)}^{\mu\nu}T_{(gg)}^{\mu'\nu'\dagger}\frac{(k_{1\mu}\bar{k}_{1\mu'}+k_{1\mu'}\bar{k}_{1\mu})}{2|\boldsymbol{k}_1|^2}\frac{(k_{2\nu}\bar{k}_{2\nu'}+k_{2\nu'}\bar{k}_{2\nu})}{2|\boldsymbol{k}_2|^2}\mathrm{d}\rho \tag{15.25}$$

が 0 になることがあるが，そうなっていない．2 つのグルーオンの重心系に移ると

$$k_1=(|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ |\boldsymbol{k}|) \qquad \bar{k}_1=(-|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ |\boldsymbol{k}|)$$
$$k_2=(|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ -|\boldsymbol{k}|) \qquad \bar{k}_2=(-|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ -|\boldsymbol{k}|)$$

である．$T^{\mu\nu}_{(gg)}$ 項との縮約，$T^{\mu\nu}_{(gg)}k_{1\mu}k_{2\nu}$，$T^{\mu\nu}_{(gg)}k_{1\mu}\bar{k}_{2\nu}$，……などを考えよう．これらの諸量は式(15.19) から，第 1 の組み合わせに対しては $\varepsilon_1=k_1$，$\varepsilon_2=k_2$，第 2 の組み合わせに対しては $\varepsilon_1=k_1$，$\varepsilon_2=\bar{k}_2$，……などとおいて得られる．$\varepsilon_1=k_1$ とおいた結果は既知である．式(15.23) より，ε_2 を k_2 で，同時に ε_1 を k_1 で置き換えた項は，$k_2^2=0$ であるから 0 である．0 にならない典型的な項は，$T^{\mu\nu}_{(gg)}k_{1\mu}\bar{k}_{2\nu}/2|\boldsymbol{k}|^2$ の形をしている．式(15.23) よりこの項は，$k_2\cdot\bar{k}_2/2|\boldsymbol{k}|^2=-1$ を用いて

$$-\mathrm{i}g^2\frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}{2k_1\cdot k_2}\bar{v}(p_2)\not{k}_1\frac{\tau^\gamma}{2}u(p_1)a_1^\alpha a_2^\beta \tag{15.26}$$

となる．この式は

$$j_\mu^\gamma\frac{-g^{\mu\nu}\delta^{\gamma\eta}}{(k_1+k_2)^2}\mathrm{i}g\varepsilon^{\alpha\beta\eta}a_1^\alpha a_2^\beta k_{1\nu} \tag{15.27}$$

と書けるが，ここに

$$j_\mu^\gamma=g\bar{v}(p_2)\gamma_\mu(\tau^\gamma/2)u(p_1) \tag{15.28}$$

はフェルミオン・反フェルミオン対の SU(2) カレントである．

式(15.27) の形の望ましからぬ項は，“理論を有意ならしめる”大義名分のもとに，次のような規則をたてれば消去できる．簡単な“枝線”処法に従って作り上げた図 15.4，図 15.5（光子をグルーオンに拡張することは言うまでもない），図 15.8 の 4 次の図形のほかに，今まで知られていなかった 4 次の図形が閉線図形にだけ存在し，その寄与は 2 グルーオン中間状態と同じ物理的領域において 0 でない虚数部を持ち，さらにその大きさは，式(15.27) のような式(15.25) への寄与をすべて打ち消すようになっているとする．さて式(15.27)は 1 グルーオン中間状態を持つ振幅の形をしている．$\mathrm{f\bar{f}}\to\mathrm{g}$ 頂点はカレント(15.28)で表され，グルーオンの伝播関数は Feynman ゲージ $\xi=1$ で現れ，その他の要素は中間状態のグルーオンと 2 つのスカラー粒子が SU(2) 偏極 a_1^α，a_2^α で結合するという解釈を成り立たせる．したがって式(15.27) は，図 15.9 に示した図形の振幅で点線がこのスカラー粒子を表す，という解釈を可能にする．われわれの探している 4 次の図形は，図 15.10 であることがもっともらしく思われる．新しいスカラー粒子は質量 0 であるはずで，そのためにこそ新しい振幅は gg 状態と同じ物

理的領域で虚数部を持つことになる．図 15.10 で表される振幅の虚数部を周知の方法で計算すると，図 15.9 の枝線図形からの寄与を含み，式(15.27) のような非物理的偏極状態から生ずる部分を相殺するように調整することができる．

この相殺が生ずるためには，図 15.10 のスカラー粒子の閉線図形は，図 15.8 の 3 グルーオン閉線図形と反対の符号を持たなくてはならない．これは結果的に言ってあらゆるもめごとの原因である．単一閉線を持つ図形にこのような相対的な負号をつけることは，もし図 15.10 のスカラー粒子が実際フェルミオンであれば，予想されるべきことであった(本節の始めの規則(v)参照)．したがって，フェルミ統計に従うスカラー粒子が必要であるように思われる．このような粒子を“お化け”（ゴースト）と言う．次のことを強調しておかなくてはならない．あたかもお化けが外線として含まれるように見える図 15.9 の枝線図形を導入したが，現実にはお化けはつねに閉線の中に閉じこめられ，その機能は中間状態のグルーオンからくる非物理的な寄与を打ち消すだけである．

ここの議論はもちろん，まったく発見法的であった．特に Feynman (1963 a, 1977) は，ユニタリティーの要請だけでは，複数個のグルーオンの閉線を取り扱う処法を与えるには十分な制約にならないことを見いだしていた．非可換ゲージ理論でユニタリティーを保存する振幅を構成する完全な規則を簡潔に導

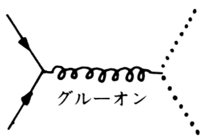


図 15.9　式 (15.27) の枝線図形による解釈

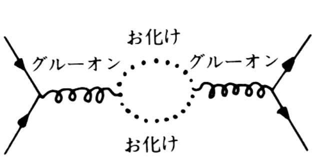


図 15.10　$f\bar{f}\rightarrow f\bar{f}$ の 4 次に寄与するお化けを含む図形

き出すことは，Faddeev & Popov (1967) によって経路積分の方法を用いて行われた．その証明によれば，お化けはスピンが0であるにもかかわらず，Fermi-Dirac 統計に従う．お化けがユニタリティーを回復することは，'t Hooft (1971 a，b) によりあからさまに証明された．お化けは“隠れた対称性”の場合も同様に必要である．このお化け閉線の問題に関連して，しかるべき場の理論の定式化に進まない限り，完全に導くことのできない（と思われる）理論の一部に触れたわけである（たとえば Abers & Lee (1973) を参照)．これ以上この問題に深入りしないことにしよう．非可換ゲージ場の諸理論に対する Feynman 規制は，顕在的·潜在的どちらの場合も，ほかの文献に与えられている (Abers & Lee，1973)．しかし一言注意を加えておく．式(15.27) のグルーオン・お化けの相互作用は，グルーオン場のゲージの取り方に依存する．ほかのゲージでは別の結合になる．枝線図形はお化けの問題といっさい無関係であって，その規制は付録Eにまとめてある．

15.2　大統一理論

強い相互作用・弱い相互作用・電磁相互作用がすべてゲージ理論でよく記述できるように思われるという事実は，おそらく3つの相互作用はただひとつのゲージ理論のいろいろ異なった様相として理解できるのではないか，という注目すべき予想を与える．弱い相互作用と電磁相互作用の部分的統一（なおまだ2つの独立なゲージ結合定数がある)は，GSW 理論で達成された．強い(カラー）相互作用も含めて，“大統一”機構を考えるという試みは自然である．この計画について簡単に説明を加えるが，大統一理論はほとんど完全に思索的段階であって，万人の合意する理論はまだ存在しないことを強調しておく．

3つの相互作用すべてを真に統一する理論は，ただひとつのゲージ結合定数を含むであろう．したがって，これから考えるべきある意味において，3つの相互作用はすべて，“実は”同じ強さを持つはずである．さて，ゲージ理論は相互作用の強さの考え方を根本的に変更したことをすでに学んだ．その変更は2つのまったく異なる方式に及んでいる．“弱い相互作用は，M_W と M_Z の値が大きいから弱いのである”とは，多少誤りやすい言い方ではあるが，ひとつの側面を集約している．相互作用は“実は”たいへんよく似ているのだが，自発的対

称性の破れ（隠れたゲージ不変性）の現象によって，似た所が隠されてしまっている可能性がある．$SU(2)_L \times U(1)_y$ 対称性は，$Q^2 \gg M_W^2$，M_Z^2 のときにだけあきらかになる．一方，9.3 節で導入した Q^2 に依存する結合の強さという考え方も同様に革命的である．おそらく，“固有”の強さについて語ることはまったく意味を持たない．むしろ結合の強さは考えている運動量（あるいは長さ）のスケールによる．この 2 つの概念は，ある経済的な可能性を示唆する．おそらく強・弱・電磁相互作用はただひとつの群 G によって記述され，G は十分大きくて $SU(3)_c$ と $SU(2)_L \times U(1)$ を部分群として含むのであろう．（SU(2) が SU(3) の部分群であるのと同じ意味である.）G はただひとつのゲージ結合定数 g_G を持つ．3 つの相互作用の強さのみかけ上の違いは，これからすぐ議論するように，今述べた方式のどれかで説明がつくのであろう．

はじめに $SU(3)_C$，$SU(2)_L$，U(1) の結合定数をそれぞれ α_3，α_2，α_1 とおいてその Q^2-依存性を考えよう．第 9 章で QCD は漸近的に自由な理論，すなわちその結合定数 α_3 は Q^2 とともに（対数的に）減少することを見た．これは非可換ゲージ理論にのみ関連している性質であり，したがって $SU(2)_L$ の結合定数 α_2 も同様な性質を持っている．一方 U(1) 結合定数 α_1 は Q^2 とともに増大する．“低”エネルギー領域（1～10 GeV の範囲）では結合の大きさははっきりと異なっており，$\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ の順序にならんでいる．Q^2 が増大するにつれ，α_3 は減少し α_2 も（α_3 より緩やかに）減少するが，α_1 は増大する．したがって，ある大きい Q^2 の値に対してそれぞれの大きさが近づいてくる可能性が存在する．

しかし次の考察により，ゲージ群 G による“大統一”対称性は（自発的に）破れていなくてはならない．3 つの異なる相互作用が同じ本来的な強さを持つ世界では，クォークは強い相互作用を行いレプトンは行わないという慣習的な考えに基づいた両者の区別は，もはや通用しない．実際，統一の図式は当然レプトンとクォークを G の共通な多重子の中に置こうとする．そのとき G のある生成演算子と結びついた対称操作（変換）が存在し，レプトンをクォークに，あるいはその逆に変えてしまう．もしこれが信じ難いというのであれば，別の類推として $SU(3)_f$ の部分群として $SU(2)_I$ と $U(1)_Y$ を考えてもよい．ストレンジネスを持たない粒子を持つ粒子に変える $SU(3)_f$ の生成演算子が存在する．対称性 G をゲージ化すると，すでに見たごとくそれぞれの生成演算子にゲージ

量子が存在する．このようなクォーク・レプトンの入れ換え変換は，たいていバリオン数の非保存を必然的に導くであろう．陽子崩壊の現在の下限（$\tau_P \geqq 10^{32}$ 年）からすると，バリオン数の保存を破る遷移をおさえる機構が必要である．その本質は考えている詳細なモデルによる．Georgi & Glashow（1974）による初期の提案は G として SU(5) をとり，媒介粒子（ふつう X 粒子と呼ぶ）の質量 M_X（自発的対称性の破れによって獲得する）を極めて大きくとることで陽子の崩壊を抑制した．Pati & Salam (1974) の模型ではまた別の機構が働いている．すぐあとで陽子の崩壊を論ずる．

結合の強さの Q^2 依存性に立ち帰り，M_X^2 で特徴づけられる対称性の破れよりずっと上の Q^2 の値においてのみ，α_i が等しくなると考えられる．（群構造によってきまる Clebsch-Gordan 係数は別にする．）一方，α_i の“低”エネルギー領域の値はわかっているから，そのエネルギー依存性を（少なくともある近似で）計算することができる．したがって α_i の既知の低エネルギー値が $Q^2 \geqq M_X^2$ では共通の値に近迫してゆくと要請することで，M_X の値の評価ができるはずである．これが Georgi *et al*.（1974）による M_X の最初の理論的見積もりの背後にある原理であった．彼らは“主な対数増大項の和”の技法に基づく式 (9.41) のような式を用いた．M_X の値はもちろん G や大統一模型の詳細により，また α_i の Q^2 依存性を計算する近似にもよる．簡単な SU(5) 模型の見積もりは $M_X \sim 10^{15}$ GeV である．より洗練された計算では多少低い値が得られ，$M_X \sim 1-5 \times 10^{14}$ GeV である（Ross，1984）．

先へ進む前にちょっと一休みして，これがどんなに巨大なエネルギーであるか銘記すべきであろう．もちろんその数学的理由は，α_i はエネルギーと共に対数的にだけ変化するから，その値を目だって変えるためには何十年もの時間をとるであろう．このような膨大な外挿の区間（10^{15} GeV から 1 GeV の間の“砂漠”）に何も新しい物理が入ってこない，というのはほとんどばかげていると言えるほど大胆な仮定である．この砂漠に，新しい中間質量の尺度で起こる現象が分布しているような，別の種類の理論も可能である．しかし古典的な大統一の範囲では，まったく新しい尺度の対称性の破れ，GSW 理論（$M_{W,Z} \sim 100$ GeV）で起こるエネルギー（あるいは質量）より数けたも異なるエネルギーに直面しているのである．きわめて大きい質量比 M_X/M_W の起源をごく自然に説

明する満足な方法はまだ見いだされていない．おそらく，これが中間尺度が確かに存在する兆しなのである．

M_X のこのような値は，陽子の崩壊を抑制できるくらい十分大きいのであろうか．崩壊率は次元の考察から粗い見積もりをすることができる．崩壊はXボソンで伝達されなくてはならないから，振幅は $q^2 \ll M_X^2$ で評価したX粒子の伝播関数からくる因子 M_X^{-2} を含む(式(10.91)，(10.92)，(10.93)参照)．したがって崩壊率 Γ_p は M_X^{-4} に比例する．Γ_p は質量の次元（$c=\hbar=1$ とおく）を持つはずだから可能な見積もりは

$$\tau_P \sim \alpha_G^2 m_P^5 / M_X^4 \tag{15.29}$$

である．ここでは陽子質量を適切な質量の尺度としてとっている．α_G は群Gの構造常数である．$\alpha_G=1/40$，$M_X \sim 10^{15}$ GeV ととれば陽子の寿命として

$$\tau_P = \Gamma_P^{-1} \sim 5 \times 10^{31}\ \mathrm{yr} \tag{15.30}$$

を得る．M_X の値として小さな値をとれば寿命も短くなる．

Georgi ら（1974）の論文では τ_P の実験的下限として 10^{30} 年を引用していた．寿命の予言がこの値より非常に長くはない理論が出現して，大統一の考えが促進され，まったく新しいたぐいの高エネルギー実験を世に送り出すことになった．これが“地下実験”である．典型的な実験は宇宙線の背景を減らすため地下深くで行い，巨大な物質量（10〜1000トン）を“凝視”することできわめてまれに起こる陽子の崩壊を探し，バリオンの崩壊と同定できる事象が起こることをねらう．“検出器”の大きさが巨大であるため，高分解能の完全な測定装置を備えることは不可能である．したがって事象の候補は個々に一義的に区別されるのではなく，大部分が背景である中から統計的に識別しなくてはならない．背景は大気中のニュートリノの相互作用による．この実験がどんなに難しいかは，バリオンの崩壊とニュートリノの誘発する反応との相対的割合は，10^{31} 年の寿命のけたでほぼ等しくなる，ということからもわかるであろう．

実験の状況は Perkins（1984）が総合報告を行っている．最初の検出器は SU(5) 対称性に具合のよい $p \to \pi^0 e^+$ 反応に対して設計され，これに対応する部分寿命の最近の下限は 3×10^{32} 年である．この値は実質的に簡単な SU(5) 対称性に基づく予言を排除してしまう(式(15.30)および Ross，1984参照)．しかし，SU(5) 対称性の中でも模型を複雑にして寿命を伸ばすことは可能である．もち

ろんほかの大統一群 G をとることも可能である．特に，超対称諸理論（Ross, 1984）では $p \to \bar{\nu}_\tau K^+$，$p \to \mu^+ K^0$ のような崩壊型式が優先する．これらの反応は観測が困難で，したがって下限の値も $p \to \pi^0 e^+$ 反応より不確かである．その部分寿命は現在のところ $\geqq 5 \times 10^{31}$ 年に止まっている．理論の面から言えば，これ以上の精密かつ複雑な模型で精度よくあいまいさのない予言をなしうる模型はない．したがって，"バリオンの安定性や寿命や崩壊様式の問題はほとんど純経験的な主題となってしまった（Perkins, 1984）．"

しかし，次に進む前により一般的な性格を持つ 2 つの論点に言及しておく．バリオンが実際に安定であり，バリオン数が厳密に保存されるとしてみよう．このとき徹底的に"ゲージ原理"に固執するならば，電荷の絶対保存と同じく，保存則はある局所的対称性の結果であり，バリオン数に結合したある到達距離の長い力の場が現れることになるであろう（Lee & Yang, 1955）．このような場が存在する証拠はない（Perkins, 1984）— ということは結合定数の大きさの上限が適当に（実験にかからぬくらい）小さい，ということと同じである．ふつう，このようなきわめて弱い相互作用が存在し得るとは考えずに，既知の力の大統一とその中で陽子が崩壊し得ると考えるほうを優先している．

第 2 の点は物質（バリオン）と輻射（光子）の密度の測定比 $n_B/n_\gamma \sim 10^{-9}$ と，物質が反物質に比べ優勢であることに関連する．その議論をここで展開するのは逸脱しすぎるであろうから，関心のある読者は Perkins (1984) や Ross (1984) を参照されたい．大統一とバリオン崩壊を組み込んだ宇宙論的模型では，現在 n_B/n_γ を明確に予言することはできないが，はじめはバリオン対称な宇宙から進化してきたとして現在の観測値と矛盾しない，ということを紹介すれば十分であろう．簡単な SU(5) 模型では理論値は $n_B/n_\gamma \leqq 10^{-16}$ で小さすぎる．したがってこれも SU(5) 理論の反証になる．陽子の崩壊については，いっそう精密な諸理論が可能であり，計算せずとも欲しい値を収納することは原理的に可能である．

バリオン崩壊の現象論的結論に関連する上述の議論は，大統一理論の経験的状況としてはいまだ決定的ではない．幸いにして，ほかの重要な量の予言ができる．それは $\sin^2\theta_W$ の値である．GSW 理論は弱い相互作用と電磁相互作用を完全に統一しているのではない．2 つの別々のゲージ群 $SU(2)_L$ と $U(1)_y$ を考え，

それぞれの群が独立にゲージ結合定数 g, g' を持つからである．もし実際にただひとつの“大きい”ゲージ群 G が存在し，$SU(2)_L$ も $U(1)_y$ もその部分群であれば，ただひとつの独立な結合定数が存在し，g と g' は互いに関連していなければならない．とすれば，式(14.63 a)より $\tan\theta_W$ が知られるはずである．注目すべきことには，この考えを少し補足すると定量的な予言ができるのである．$SU(2)_L \times U(1)_y$ 理論では，共変微分は

$$\partial_\mu + ig\boldsymbol{t}^{(t)} \cdot \boldsymbol{W}_\mu + ig'(y/2)B_\mu \tag{15.31}$$

の形を持っていた．これを式(14.63a)，(14.17) を使って

$$\partial_\mu + ig\boldsymbol{t}^{(t)} \cdot \boldsymbol{W}_\mu + ig\tan\theta_W(Q - t_3)B_\mu \tag{15.32}$$

と書く．もし $U(1)_y$ 部分が $SU(2)_L$ 部分に対して対称的に入るとすれば，量

$$t_0 = \tan\theta_W(Q - t_3) \tag{15.33}$$

を $\boldsymbol{t}$ とまったく類似した U(1) の生成演算子であるとみなさなくてはならない．したがって t_0 と B_μ の結合は，SU(2) の生成演算子と $\boldsymbol{W}_\mu$ の結合に等しくなる．これが統一されたということである．かなめになる点は (Georgi & Glashow, 1974)，t_0 と $\boldsymbol{t}$ がもしひとつの群の生成演算子であるならば，共通の規格直交条件を満たしていなくてはならない，ということである．この条件は

$$\mathrm{Tr}(t_\alpha t_\beta) = N\delta_{\alpha\beta} \tag{15.34}$$

ととれる．N は表現にはよるが α，β にはよらない．標識 α，β は G のすべての生成演算子にわたる．式(15.34) は，SU(2) および SU(3) に対してすでに用いた式の一般化である．式(15.33)，(15.34) より

$$\mathrm{Tr}\,Q^2 = \mathrm{Tr}(t_3)^2 + \cot^2\theta_W \mathrm{Tr}(t_0)^2 = (1 + \cot^2\theta_W)\mathrm{Tr}(t_3)^2 \tag{15.35}$$

$$\sin^2\theta_W = \mathrm{Tr}(t_3)^2/\mathrm{Tr}(Q^2) \tag{15.36}$$

の結果を得る．式(15.34)の規格化定数 N は比(15.36)の中では，G の任意の表現で対角和を計算するときに相殺してしまう．したがってひとつの世代（たとえば u，d，e，ν）のみを考えればよく，粒子に G のある表現(あきらかに可約)を与えて式(15.36)を計算することができる．カラーを持つクォークの左回りの 2 重子が 3 個，左回りのレプトン 2 重子が 1 個，およびこれに対応する右回りの 1 重子があるから，$\mathrm{Tr}(t_3^2) = 2$，$\mathrm{Tr}(Q^2) = 16/3$ となり，したがって

$$\sin^2\theta_W = 3/8 = 0.375 \tag{15.37}$$

という結果を得る．これは統一理論の最初のモデル，Georgi & Glashow (1974)

の SU(5) 模型が予言する数値である．

この点でいささかがっかりする．値(15.37)は実験値と大きくへだたっているからである．しかし，G は M_X より大きいエネルギー領域でのみよい対称性になっていることを忘れてはならない．量 $\sin^2\theta_W$ (あるいは $\tan\theta_W$) は GSW 理論の結合定数 g, g' の相対的強さを表すが，すでに強調したようにこれら結合定数(あるいは対応する α_2, α_1) はエネルギーの尺度とともに変わる．実際，$\tan\theta_W = g'/g$ で g' は可換 U(1) 群，g は非可換 $SU(2)_L$ 群に関連する．Q^2 が M_X^2 の値(式(15.37) が成立すると仮定される領域) よりも小さくなれば，g' は減少し g は増大する．したがって，$\tan\theta_W$ (および $\sin^2\theta_W$) はあきらかに減少する．ひとつの可能性として $\sin^2\theta_W$ の値が大統一尺度では 3/8 であるが“低”エネルギー尺度ではおよそ 0.23 になり得る．

再び，正確な予言は特定の模型に準拠してのみ可能である．$M_X \sim 10^{15}$ GeV を与える“主要対数項”の技法に基づく簡単な SU(5) の見積もりでは $\sin^2\theta_W \approx 0.21$ である．これはあきらかにもっとも力強い励ましになる結果である．おそらくこれこそ大統一を信じ続ける明白な理由のひとつなのである．M_X の見積もり同様，SU(5) の範囲でもいろいろ凝った計算を行うことができるが，$\sin^2\theta_W$ の値を大きく変えることはない．再び，より複雑な模型で — どれひとつとして特に必然的というものはない — $\sin^2\theta_W$ の観測値を許容できるものがあってもよい．

大統一理論に結びついたほかの予言は，クォークとレプトンを同じ多重子に指定することからくる．典型的な例では，クォークのレプトンに対する質量比が予言できる．例えばもっとも簡単な SU(5) 模型では，$m_d = m_e$，$m_s = m_\mu$，$m_b = m_\tau$ である．繰り返しになるがこれらの予言は M_X を超えたエネルギー尺度で成り立つことを忘れてはならない．第6章で学んだように，質量もくりこみの対象であり，Q^2 に依存する有限な質量のくりこみ効果の考えを“低”エネルギー領域の質量の予言に用いなくてはならない．m_b の補正した値は6種のフレイバーに対して～5.3 GeV (Ross, 1984) となり，よい結果である．m_s の同様な予言は～500MeV で，まずまずの結果である．もっとも悪い予言は $m_d/m_s \sim 1/200$ で，カレント代数から得られる値 1/24 に比較すべきである．より複雑な模型はより多くのパラメーターを含み，予言の力が弱くなる．

くりこみ効果を強調するこの節の見解については，ひとつ技術的に重要な点を少なくとも言及しておかなくてはならない．議論はすべて，基礎になる大統一ゲージ理論はくりこみ可能であることを前提としている．くりこみ可能性の証明のきわめて重要な武器のひとつはWardの恒等式であり，これは理論がゲージ不変であることの表現である．しかし，軸性カレントのはいってくる理論では，Wardの恒等式に異常な寄与を生ずることがあり，一般にはくりこみ可能性を壊してしまう．実際，これらのいわゆる“異常項”を相殺するように調整することは可能であるが，これは大統一理論を作る際の重要な制約になることが知られている．（たとえばTaylor（1976）参照．）

大統一理論になぜ関心を持つのか，という基本的な理由をひとつ述べずにこの主題を閉じるわけにはいかない．それは，大統一理論は電荷の量子化を説明する望みがあるからである．8.3節で，非可換ゲージ対称群Gの場合は，ただひとつの普遍的な結合の強さ g_G しか許されないことを指摘した．このことは，群の任意の表現pにおいて，“一般化された荷量” $g_G G_i^{(p)}$ は常に基本量 g_G の整数倍であり，その大きさは表現pにおける対角化可能な生成演算子 $G_i^{(p)}$ の固有値に依存する．（角運動量の類推をとるとわかりやすい．すべての J_z の値は $\hbar/2$ の単位で量子化されているが，これは交換関係に由来する．）可換ゲージ群にはこのような制約は存在しない．おおまかに言えば，尺度（単位）を決める交換関係が存在しないからである．理論的可能性としては，陽子の電荷と同じでない電荷を持つ粒子があってもよい．$SU(2)_L \times U(1)_y$ の段階では，関係 $Q=(t_3+y/2)$ は勝手につけ加えた．なぜ電荷の $U(1)_y$ 部分が量子化されているか，先験的理由は何もない．（一方，y がなければ Q は t_3 の固有値から決まるから，必然的に $e/2$ の整数倍に量子化されていたであろう．）しかし，U(1) 部分を持たない大統一群（たとえばSU(5)）では，Q は生成演算子であって，群の交換関係とその固有値によって，基本的な群の定数 g_G を通じて尺度が設定される．U(1) 部分を持たない大統一模型からは，電荷の量子化が自動的にでてくるのである．

15.3 閉じ込め

1.2.3項で，ただひとつの重要な例外（La Rue *et al*., 1977，1981）を別にしては，クォークもグルーオンも，一般にゼロでないカラー量子数を担ってい

ると思われる粒子は，幾多の注意深い探索にもかかわらず，自由な単独粒子としては観測されていないことを述べた．すでに見てきたように，ハドロンの中にはクォークとグルーオンが存在するという多くの印象的な証拠があるが，個々の粒子に分離することは不可能のように見える．粒子はハドロンの内部に閉じ込められている．いつの日にか，カラーを担った遊離した粒子が発見されるのかもしれない．しかし現在の主流的な見解は，すべてのカラー状態は永久に閉じ込められ，カラー 1 重子のみが自由粒子となるという主張である．

したがって問題は，閉じ込めの性質をカラーの力学，QCD から説明することである．簡単な点からはじめよう．非可換ゲージ理論 QCD では，実効的な結合定数 $\alpha_s(Q^2)$は，Q^2 が増えるに従って減少することを見た ($f \leqslant 16$ と仮定する)．これに対応して Q^2 が小さくなるにつれて $\alpha_s(Q^2)$ は大きくなり，近似式(9.41)はもはや成り立たなくなるにせよ，十分小さな Q^2 に対して $\alpha_s(Q^2)$ が非常に強くなることは，ありそうなことである．これは，カラーを担う粒子が大きく分離すると，それらを結びつける力はますます強くなるということを意味する．これは求めているたぐいの結果である．

Q^2 が小さいときの $\alpha_s(Q^2)$ のふるまいは正確には知られていない．摂動論を使うことはできず，摂動論を超えて信頼できる計算技法はまだ研究がはじまったばかりだからである．次の節ではそのような技法のひとつ，離散的な時空間“格子”のうえで場の理論を研究する考えを述べよう (Creutz，1979)．ここでは，現在の閉じ込めの研究のある一面について，非常に簡単な手ほどきを述べるが，この問題はいまだ未解決であることを力説しておかなくてはならない．われわれはすでに，おそらく自然が用いたと思われるあきらかに非摂動的なゲージ理論の一面に出会っている．隠れた対称性の諸現象である．第 13 章で，超伝導基底状態の本質は摂動論では到達できず，弱い力に関しては物理的真空もそうであることを強調した．後者の場合では，現象を力学的に (BCS 型？) 解明する試みはなされておらず，特徴的な条件$\langle\tilde{0}|\hat{\phi}|\tilde{0}\rangle \neq 0$ は単に仮定されているに止まる．この理論は質量を持つベクトルボソンの場合を扱う．非摂動的 QCD の真空の何か異常な特徴が，閉じ込めと似た状況を作り得るのであろうか．

第 13 章で導入した“相対論的超伝導体”をさらに考察することにより，ある

有望な考え方がでてくることは注目に価する (Mandelstam, 1980). 重要な手がかりは, ハドロン分光学の目だった特徴である. ハドロンの共鳴準位は, 直線的に上昇する回転体のエネルギー系列の上にのっている. このような系列では, 各共鳴準位の角運動量 J を, 共鳴質量の 2 乗に対して図示すると, ほとんど直線になる (Regge 軌跡). 重粒子に対しては, 系列はおそらく $J=19/2$ まで存在する. この種の系列は, 高い角運動量に対しては, ハドロンの "弦 (またはひも) 模型" あるいは "2 重共鳴モデル" によって, よく記述することができる (たとえば Mandelstam (1974) 参照). このモデルは, ハドロンを量子化された相対論的な 1 次元構造, すなわち "弦" とみなす. Nielsen & Olesen (1973) および Tassie (1974) は, さきにわれわれが相対論的超伝導体と呼んだ特定の U(1) ゲージ理論の渦線解として, 弦を解釈できることを示唆した.

このような解が, 現実の超伝導体の場合に存在することは, よく知られている. 実際, 第 13 章で論じた超伝導は, タイプ I と呼ばれる超伝導体のひとつの種類にすぎない. タイプ I の超伝導体は, 外磁場がかけられても, その強さがある臨界値以下であるならば, ずっと超伝導の状態に止まり, 完全な Meissner 効果を示す. ほかにまったく別の種類のタイプ II の超伝導体があって, 外磁場が細かいフィラメントの形になって, 部分的にはいりこむことができる. それぞれのフィラメントの内部では場が強く, 媒質は超伝導体ではない. フィラメントの芯の外では媒質は超伝導の状態になっており, 場は固有侵入距離 λ を超えると消失する. 磁束のフィラメントはそれぞれのまわりに, 遮へいカレントの渦が循環する. フィラメントはしばしば渦線と呼ばれる. フィラメントはあたかも磁束を包みこむ無数の薄い円筒の集まりのような形でタイプ I の超伝導体にもみ込まれている. したがってタイプ I の物質は単連結でない形をしている.

現実の超伝導体では, 遮へいカレントは巨視的な対の波動関数 (場) ψ と関係している. タイプ II の超伝導体が可能になるためには, $|\psi|$ は磁束フィラメントの中央で 0 になり, $\xi<\lambda$ の範囲にわたって超伝導体のしかるべき定数値に達するようになっていなくてはならない. ξ を "コヒーレンスの長さ" という. Ginzburg-Landau の理論 (相対論的超伝導体の静的取り扱い) によれば, より正確にはタイプ II のふるまいは $\xi<\sqrt{2}\lambda$ で成立する. ξ および λ は, もちろん温

度に依存する．磁束フィラメントの近傍における $|\psi|$ と B の様子を図 15.11 に示す．簡単なタイプ I の超伝導体では $|\psi|$ はただ定数であったが，タイプIIの場合はこの図に示すような変わり方をしている．電磁ポテンシャル A と波動関数 ψ の連立 Ginzburg-Landau 方程式の解が，このようなふるまいを示すのである．

重要な結果は，渦線の中の磁束は量子化されていることである．この事実はすでに第 13 章（185 ページの脚注）で言及した．あからさまにそれを見るために

$$\psi=|\psi|e^{i\theta} \tag{15.38}$$

と書くと，超伝導体の中のカレントはいつものように

$$\boldsymbol{j}=\frac{g|\psi|^2}{m}(\nabla\theta-q\boldsymbol{A}) \tag{15.39}$$

となる．これを整理し直して

$$\boldsymbol{A}=\frac{-m}{q^2|\psi|^2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{q}\nabla\theta \tag{15.40}$$

とおく．この式を，渦線を含むタイプIIの超伝導体の内部の閉曲線 C のまわりに積分しよう．渦からずっと遠い所では遮へいカレント $\boldsymbol{j}$ は 0 になるから

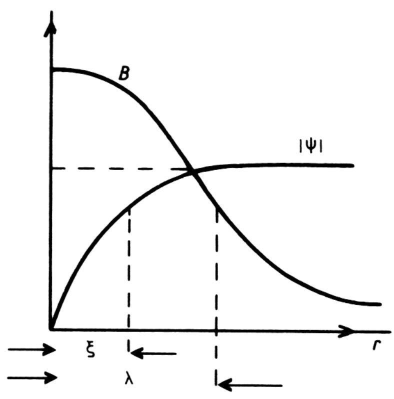


図 15.11　磁束フィラメントの近傍における磁場 B と巨視的な(対)波動関数の大きさ $|\psi|$

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}s=\frac{1}{q}\oint_C \nabla\theta\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{1}{q}[\theta]c \tag{15.41}$$

が成り立つ．$[\theta]_C$ は C のまわりをまわるときの位相の変化である．波動関数 ψ が1価であれば，閉曲線 C のまわりの位相の変化 $[\theta]c$ は0か 2π の整数倍である．式(15.41)の左辺を Stokes の定理で変換すると，C を周とする表面を通る磁束 Φ は，量子化されていることがわかる．

$$\Phi=\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{2n\pi}{q}=n\Phi_0 \tag{15.42}$$

ここに $\Phi_0=2\pi/q$ は磁束量子 ($c=\hbar=1$) である．ψ が1価でなくてはならないということはけっして自明ではないが，実験は明白に，$q=2e$ (Cooper 対の電荷と解釈することができる) ととった Φ_0 を単位にして，磁束が量子化されている現象を示す．この現象はタイプIの超伝導体 (185 ページ脚注参照) の単連結でない試料，およびタイプIIの物質の磁束フィラメントで観察される．後者の場合は，各フィラメントは単一量子 Φ_0 を帯びている．

さて，このような結果を“相対論的超伝導体”の場合に適用してみよう．物理的真空は，完全な Meissner 効果よりもむしろ“タイプII”のふるまいをとると考えてみる．いつものように，対の波動関数の役割は Higgs 場 ϕ が演ずる．Higgs ポテンシャル $V(\phi)$ を適当にとれば，渦線をきわめて細くとることができる．実際，前述のごとく λ は M_V^{-1} に対応し，ξ は Higgs 中間子 σ の Compton 波長 μ^{-1} である．(14.7 節参照．静的な方程式 $(\Box+\mu^2)\sigma=0$ の解は，μ^{-1} の程度の指数的減少を示す．) これらの細い渦線は，弦ハドロンの原型と解釈されるであろうが，これが無限に伸びていることは望ましくない．そこで磁束が閉曲線をなすとか，磁束を吸収する実体によって弦が打ち切られる可能性を考えることができる．このような実体が Dirac の磁気単極子 (Dirac, 1931) である．Dirac の量子化条件は

$$qg_{\mathrm{m}}=n/2 \tag{15.43}$$

と表される．ここに q は電荷，g_{m} は磁気単極子の強さ (磁荷) で，単極子を包みこむ任意の閉曲面から出る磁束 $4\pi g_{\mathrm{m}}$ は，単位 Φ_0 で量子化されていることを保証する．したがって磁束フィラメントは，Dirac の磁気単極子 (g_{m} の適当な符号に応じて) から発し，また単極子に終わることができる．これは南部 (1974)

によって初めて指摘された．

これが，いろいろな方法によって，閉じ込めを理解しようとする幾多の理論的試論のもとになっている基本的なモデルである．タイプIIの超伝導性真空の中に埋めこまれた単極子・反単極子対は，磁束フィラメントの量子化とあいまって，中間子のモデルとなる．対の間の距離（フィラメントの長さ）が増大するにつれ，フィラメントのエネルギーも距離に比例して増大する．磁束はフィラメントと直角な方向に広がることができないからである．これがまさに，ハドロンの分光学から要求される直線的に増大するポテンシャル・エネルギーの性質である．磁束の配位は安定であり，磁束はもれ出すことができない．量子化された保存量だからである．

最終的にQCDに応用するためには，（おそらく）0でないカラー量子数を担う粒子が閉じ込められることが必要である．この量子数は，磁荷というよりはむしろ，U(1)の場合の電荷に類似したものである．したがって，今までの議論で磁気と電気の役割を入れかえることを想像してみるとよい．実は，磁気単極子が存在すれば，Maxwellの方程式はこのような対称性を持っている．超伝導性の基底状態の本質的特徴は，帯電したボソン状のフェルミオン対の凝縮によって生ずるコヒーレント状態を含むことである．$\boldsymbol{B}$ではなく$\boldsymbol{E}$のフィラメントを閉じ込める真空は，凝縮した磁気単極子のコヒーレント状態として作られるであろう(Mandelstam, 1976, 't Hooft, 1976)．そして$\boldsymbol{E}$フィラメントは終点に電荷を持つであろう．さて，磁気単極子はQEDの解としておのずから生じてくるのではなく，別個に導入してやらなくてはならないであろう．きわめて注目すべきことには，非可換ゲージ場の理論では，その対称性が自発的に破れて電磁$U(1)_{em}$群になるとき，磁気単極子タイプの解が実際に現れてくるのである．まさにこの事情が，$SU(3)_c$と残存する$U(1)_{em}$を含む大統一理論では起こっているのかもしれない．余談であるが，単極子解は，前節で論じた非可換ゲージ理論のもたらす電荷の量子化について，啓蒙的な別の方法を与えている(前節を参照)．Dirac (1931) が指摘したように，単極子がひとつあれば，量子化条件(15.43) により電荷が量子化されるのである．

この着想をQCDに応用するとき，$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$は適当なカラーの場と考えなくてはならない．すなわち両者は$SU(3)_c$の標識を担っている．SU(3)の群構造は

U(1)模型のそれとはまったく異なっていて，静的な解（類推として用いたGinzburg-Landau理論のように）だけにとらわれる必要はない．実際，現実のQCD真空（基底状態）がこのような単極子のコヒーレントなプラズマとして作られ，電荷と電束を閉じ込め得るかどうかは，現在ひきつづき研究の進められている問題である．これ以外の閉じ込めのメカニズムももちろん可能である．なんべんも念をおしているように，閉じ込めの問題のむずかしさはその非摂動的性格にあるのである．

それでは以上の考えを検証し，QCDの長距離かつ非摂動論的側面を追求する方法が何かあるであろうか．クォークの閉じ込めとQCDの真空についての術策めいた想定はさておいて，QCDの非摂動論的取り扱いがおそらく，低エネルギー領域のハドロン物理すべてを理解する鍵になっている．これは本書の摂動論的方法では触れなかった主題である．次の最後の節で，離散的な時空間の格子の上で定式化したゲージ諸理論に基づき，非摂動論的特性と取り組むある試みを説明しよう．

15.4 格子ゲージ理論

時空点の離散的な格子の上に場の理論を定式化することは，一見，時空の連続像を大胆に改変するように見える．例えばこのような格子理論は，連続的な4次元時空間にふさわしいいつもの回転やローレンツ変換に対する不変性を欠くことはあきらかである．格子間隔が十分小さければ，これは問題にならないだろうと希望せざるを得ない．しかし，格子理論に重要な利点がいくつかある．われわれは主として非摂動的な挙動に関心があるのだから，計算を解析的に遂行することはできそうにもない．もちろん，少くとも摂動論の枝線図形に対しては計算は可能である．しかし摂動論ですら，すぐ数値的に計算せざるを得ない積分に出会ってしまう．それを遂行する標準的な方法は，もっとも簡単な場合には積分を次のようなある種の離散的な和で近似することである．

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\sum_i f(x_i)\Delta x$$

したがって（一般には多次元の）点の網を選ばなくてはならない．おそらく，まずはじめにこのような点の網の上で理論を定式化するのが，意味を持つであ

ろう．

しかし，より基本的な観点がここに含まれている．本書を通じて学んできたように，過去50年間にわたる理論物理学の功績のひとつは，場の量子論における紫外発散を“馴らす”ことであった．これは摂動論の各次数ごとに，無限大をよくわかった形に分離できるよう，発散する図形をそれぞれ規正することからはじまる．ある次数ですべての無限大がこのようにして確認されると，くりこみの処法によって，質量や結合常数のような観測可能なパラメーターの中に，無限大をすべてさらい込んでしまうことができる．しかしこの方法は，非摂動論的な場合にはただちに問題を引き起こす．摂動論に現れるような特定の発散積分を用いて無限大を把握することができないとき，どのようにして紫外発散を規正し，ひいては理論を定義することができるのだろうか．紫外発散を制御し，まったく非摂動論的なやり方で理論を定義することができる必要がある．この意味では，連続的な時空間を格子で近似化することは，発散を規正するむしろ自然な方法と思われる．時空点の格子は最少距離，すなわち隣同士の間の格子間隔“a”を導入する．どの点も a 以下に近づくことはできないから，格子理論ではこれに対応する最大運動量 $\Lambda\sim\hbar/a$ が存在する．したがってはじめから理論は自動的に紫外有限であり，摂動展開の存在を仮定する必要はない．（もちろん，パラメーターが a にどう依存するかという点でくりこみの問題が入ってくる．）これが格子ゲージ理論を展開するときの Wilson のそもそもの動機であった（Wilson, 1974, 1975）．

格子による定式化のさらに重要な利点は，以下に述べるように，場の量子論と統計力学の間に，直接の関連をつけることができる点である．この関係により，2つの分野の一方から他方へ，物理的直観と数値的技法を移行することができ，これはどちらの分野にとってもたいへん役に立つことである．

したがって，直接数値的な計算に適した場の量子論の定式化を探すことにしよう．ただちに，非可換な演算子に基づく定式化は除いた方がよいと思われる．それはどう数値的に模擬したらよいか，容易にはわからないからである．実際，普通の量子力学でも同じことが言える．演算子を用いない量子力学の定式化があるだろうか．Feynman の“径路積分の方法”がその答えで，これは格子理論の本質的な出発点になっている．

Feynman の定式化を理解するには，第一原理にまで立ち戻らなくてはならない．実際，この定式化は，4.2.1 節で簡単に説明した古典理論の思想の見事な一般化にほかならないからである．そこでは，伝統的な Newton のやり方とはまったく違ったように見える古典力学の定式化の方法を学んだ．Newton の法則に仮定されている微分方程式は軌道（あるいは径路）の局所的な一点から一点への移りかわりを説明しているが，作用原理は大局的な概念，全径路の作用積分への寄与に基づいている．ごく自然に生じてくる問題は，Schrödinger あるいは Heisenberg の微分方程式が Newton 力学の量子論的拡張であるならば，大局（大域）的な“径路による寄与”の方法の一般化はどう類推されるか，ということである．

この問題の答えは，Dirac (1981，第 32 章) によってヒントを与えられたが，Feynman によって完全に展開された．Feynman と Hibbs による書物 (1965) は本質的にきわめて魅力ある議論を展開したが，ここではその中心的な思想を述べるに止めよう．粒子はどのようにして，時刻 t_1 における位置 $q(t_1)$ から時刻 t_2 における位置 $q(t_2)$ に移るか，というのが問題である．図 4.4 に戻ってそれを参照する．古典力学の場合は，無限にたくさんの可能な径路 $q_i(t)$ を考えることができるが，現実の径路として実現するのはただひとつであって，作用積分

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\ \dot{q}(t))\mathrm{d}t \tag{15.44}$$

を $q(t)$ の関数として最小にするものである．しかし量子力学の場合は，4.2.2 節で注意したとおり，量子論的なゆらぎによって粒子は明確な径路をたどることができない．量子論の通常の定式化では，この事実は径路という概念自体が無用であることを意味する，と受け取られる．Feynman の直観は，これとは反対の観点もまた可能であるとして，それを尊重する．量子論では唯一無二の径路は禁止されているのだから，可能なすべての径路を原理的に用いるべきである．換言すれば，図 4.4 のすべての径路を，物理的に可能な径路としてとるのである．(図に示したもの以外にも無数の径路のとり方があるがそれもすべて含む.)

しかしすべての径路が同じように重要だというわけではない．いずれにせよ，$\hbar\to 0$ の極限で古典論的軌道がある意味で多分得られるはずである．とすれば，径路のしかるべき重みのつけ方を見いださなくてはならない．Feynman の与

えた処方は秀れて簡単である．S を特定の径路に対する作用とするならば，各径路に重みの因子

$$e^{iS/\hbar} \tag{15.45}$$

を与える，というのである．一見したところ，これは何か奇異な感じを与える提案である．すべての径路は — たとえ古典的なものであっても — 絶対値 1 の量で“重みをつけて”いるからである．しかし言うまでもないが，式(15.45) の形の寄与はすべての径路について可干渉的に（コヒーレントに）加え合さなくてはならない．これはちょうど 2.5 節の“二間隙”の振幅を重ねたのと同じである．古典的径路を他から区別するものは，径路を少し変えても S が定常になることである．したがってこの附近の径路は足し合わさる強い傾向があり，この付近から遠く離れた経路上では位相因子は相殺を起こす傾向にある．粒子が古典的径路から“迷い出る”大きさは，対応する作用の $\hbar$（作用の量子）に対する大きさによる，径路の可干渉性の尺度は $\hbar$ にとられている．これが $\hbar$ を 1 とおかない理由である．

さてまとめると，$q(t_1)$ から $q(t_2)$ に至る量子力学的振幅は

$$\sum_{\text{すべての } q(t) \text{ 経路}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\ \dot{q}(t))\mathrm{d}t\right) \tag{15.46}$$

に比例する．場の量子論への拡張は容易である．4.2.4 節で古典力学的な場の理論をどう“大局的に”定式化するか学んだが，場 $\phi(\boldsymbol{x},\ t)$ の運動方程式は，ϕ が作用積分

$$S = \int \mathscr{L}(\phi,\ \dot{\phi},\ \partial\phi/\partial x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{15.47}$$

を極小にする要請から導かれた（4 次元への拡張は 4.4 節参照）．これから式(15.46) の場の場合の自然な拡張は

$$\sum_{\text{すべての } \phi \text{ の場}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}^3x\mathscr{L}\right) \tag{15.48}$$

になることが想像できる．しかし，これは<u>何の</u>振幅であろうか．この疑問に答えるには，もはや（座標 $q(t)$ を持つ）一粒子系を扱っているのではないことを銘記しなくてはならない．表式(15.46) は“系”（座標 $q(t)$ を持つ粒子）が時刻 t_1 における配位 $q(t_1)$ から時刻 t_2 における配位 $q(t_2)$へ行く振幅に比例する．式(15.48)では系は量子場全体であり，任意数の粒子を含み得る．しかし，外から

の刺激がないときは，エネルギー的に言って，場はおそらくもっともエネルギーの低い基底状態，すなわち真空の状態であろう．したがって式(15.48)で，ある場の配位($\boldsymbol{x}_1$, t_1)から別の配位 ($\boldsymbol{x}_2$, t_2) へ移ってゆく“系”とは，真空の状態である．真空が（無限に多くの）場の“軌道”を通じて発展するという事実は，古典的な真空のまわりの任意の量子力学的なゆらぎが可能である，という事実にまさに対応する．粒子（基底状態の上の励起状態）が伝播する振幅は式(15.48) によく似た式で表され，場の積は $\exp(\mathrm{i}S/\hbar)$ で重荷がつけられる．

Feynman の定式化は古典的な関数だけを用いて演算子を用いない量子力学である．計算機へかける前に，もう一段階，統計力学へ結びつける段階が必要である．式(15.46)，(15.48) は急激に振動する複素指数関数のために，古典的な軌道の場合に比べて数値計算がきわめて難しい．これを処理するために大胆な一歩を踏み出して時間軸を虚数方向に回転しよう．

$$t \to \mathrm{i}\tau. \tag{15.49}$$

これは振動する因子$\sim\exp(\mathrm{i}S/\hbar)$を（おそらく）指数的に減少する関数$\sim\exp(-S_{\mathrm{E}}/\hbar)$に転換する．したがって指数因子は古典的な重みの関数のように見え，もっとも重要な径路はやはり S_{E} の極少値の近傍である．添字 E は Euclid 的であることを表す．実効的に，長さの 2 乗の不変式が $c^2t^2-\boldsymbol{x}^2$ である普通の時空間から，長さの 2 乗が $-c^2\tau^2-\boldsymbol{x}^2$ である(4 次元)Euclid 空間へ移ったからである．

量子場のこの Euclid 版は，格子の上では，次にみるように実は統計力学の系とよく似ている．統計力学の基本量は分配関数 Z

$$Z=\sum_{\text{配位}}\exp(-H/kT) \tag{15.50}$$

であって，Boltzmann の重荷因子を付した“状態和”あるいは適当な自由度を持つ配位の和である．H はそれぞれの配位で計算した古典的ハミルトニアンである．表式 Z はすでに Euclid 版 (15.46)，(15.48) と似ている．その平行性は時空間を“離散化”するともっとよくわかる．簡単のためただひとつの変数 t を持つ式(15.46) を考えよう．式(15.46) と式(15.47) を比べればわかるように，量子力学は空間の次元を持たない量子場の理論のようである．例えば，j を整数として $t=ja$ とおいて離散化する．すると $q(t)$ は q_j となり，“場所” j におけ

る q の値 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ は $(q_{j+1}-q_j)/a$ となり，式(15.46)の中の t に関する積分は j に関する和になる．特に，L が本質的に $\dot{q}^2$ であれば，式(15.46)の離散的 Euclid 形は

$$\sum_{q_j\,配位}\exp\left(-\sum_j(q_{j+1}-q_j)^2/a^2\hbar\right) \tag{15.51}$$

となるであろう．さて今度は格子の上のスピン系の統計力学を考える．例えば Ising 模型ではハミルトニアンは

$$H=J\sum_j S_jS_{j+1} \tag{15.52}$$

の形をとる．J は定数で，和は格子点 j について行い，スピン変数 S_j は ±1 の値をとる．式(15.52)を式(15.50)に代入すると q_j がスピン変数の役割を担う式(15.51)と大変類似してくる．当然のことながら“有効ハミルトニアン”にまったく同じではないが（式(15.51)の中には“最近接相互作用”を含むが），基本的な類似性はあきらかである．

あきらかにこれはそのまま4次元へ ― 4次元 Euclid 空間の統計力学を考えれば ― 拡張される．式(15.50)の統計力学のパラメーター kT は，式(15.51)の $\hbar$ にある意味で対応する．しかし，もうひとつ対応のつくパラメーターがある．何度かゲージ理論では共変微分が基本的な役割を果たすことを述べた．例えば U(1) の場合は $D^\mu=\partial^\mu+\mathrm{i}eA^\mu$ である．格子理論では，この量を結合パラメーター e によらないように，ゲージ場を定義し直すのが便利である．そこで $\tilde{A}^\mu=eA^\mu$ とおく．自由な Maxwell のラグランジアンは

$$-\frac{1}{4e^2}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{15.53}$$

となり，非可換的ゲージ場のラグランジアンも類似した形をとる．したがって一般に kT は $g^2\hbar$ に対応し，“高（低）温度”は“強（弱）結合”に対応する．

量子場の理論を統計力学と関連させる利点は，分配関数を取り扱う解析的および数値的技法が，長年にわたって発展してきている，という事実にある．特に，高温/強結合展開は，低温/弱結合展開および数値解とともに，格子上で場の理論の相転移の詳しい機構に光を投ずることができよう．

これらの考えをゲージ場の理論の閉じ込めの方程式を考察することで例解してみよう．格子の上では，連続体理論の局所ゲージ不変性のようなものを維持

することがおそらく本質的であろう．これが格子上のゲージ理論に特有な新しい基本的特徴であろう．意外なことだが，本質的な段階はIsing模型で最初に研究された．Wegner (1971) は，相構造を“局所的秩序パラメーター”では表しきれない局所対称性を持つ理論に関心を寄せていた．普通のIsingスピン模型では，相構造は磁化

$$\langle S\rangle=\frac{\sum_{\text{配位}} S_i\exp(-H/kT)}{Z} \tag{15.54}$$

で特徴づけることができ，これは2つの相（秩序および無秩序の）を区別する局所的秩序パラメーターになる．しかし，Isingのハミルトニアンは局所対称性を持たず，その代わり置き換え

$$S_i \to -S_i,\qquad \text{すべて位置 i において} \tag{15.55}$$

のもとで不変になる大局的対称性を持っている．これは“大局的Z(2)対称性”と呼ばれてよい．スピンがいたるところで一斉に向きかわるから大局的であり，スピンの許される値 ±1 は掛け算についてZ(2)群の要素になっているからである．さて局所的ゲージ不変性とは，大局的でなく局所的な変化を施す自由度に関している．局所的なスピン変換に対して不変なスピンの理論を作るために，Wegnerはスピンを格子点ではなく連結（リンク）に関連させた．図15.12に示すように，連結は格子点 n と (2次元では) 方向のベクトル μ，ν で指定することができる．局所的なスピン変換を，格子点 n (図15.13) に結びつくすべての連結上でスピンを逆転させる操作 $G(n)$ であると定義する．この局所的なスピ

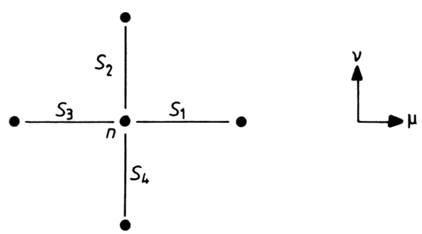


図15.12 場所 n からの結合線に結びついたIsingスピンをもつWegnerのゲージIsing模型

ン逆転のもとで不変な“ハミルトニアン”を作るには，もっとも簡単な“いちばん局所的な”方法は，H が“閉路（プラケット）”変数のみによる，とすることである．基本的な閉路スピン相互作用は，図 15.14 に示すように，格子上の基本的な 4 角連結系のまわりのスピンの積である．全“エネルギー”を

$$H=\sum_{\square} H_{\square} \tag{15.56}$$

で定義するとき，閉路エネルギーは各閉路について

$$H_{\square}=-JS_1S_2S_3S_4 \tag{15.57}$$

で与えられる．このときハミルトニアンは，どの格子点における局所的スピン変換のもとでもあきらかに不変である．どの閉路においても，2 つのスピンがいつも逆転するからである．このようにして，局所的 Z(2) 変換のもとで不変なスピンの理論を定義することができた．これがいわゆるゲージ Ising 模型である．

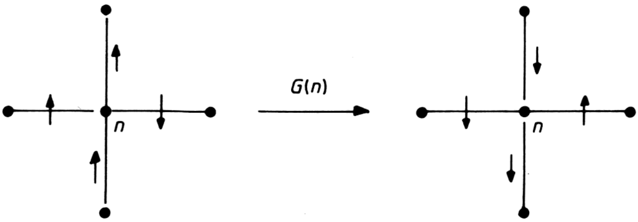


図 15.13　ゲージ Ising 模型における局所スピン変換

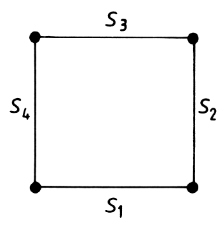


図 15.14　スピンの基本“プラケット”（閉路）

この模型は，ゼロでない局所的秩序パラメーターが存在しないことが証明できるのでおもしろい．にもかかわらず，ある閉回路 C（図 15.15 参照）のまわりの連結スピンの積の性質を調べることにより，Wegner は 2 つの相の存在を示すことができた．ループ（閉路）パラメーター $W(C)$ は局所的に不変で，格子ゲージ理論の Wilson ループの先駆者である．$W(C)$ は次のような漸近的ふるまいをすることが証明できる．

$$\text{高温領域で } W(C) \sim \exp(-A) \tag{15.58 a}$$

$$\text{低温領域で } W(C) \sim \exp(-P) \tag{15.58 b}$$

ここに A は回路 C で囲まれる面積，P は回路の周の長さである．したがって $W(C)$ で 2 つの相と区別することができる．

高温の極限は低温の極限よりずっと扱い易い．格子計算の感覚を得るために簡単な Z(2) ゲージ理論のもとで面積法則 (15.58 a) を導いてみよう．導き方の本質的な部分は，格子 QCD（後述）の Wilson の定式化とまったく同じである．したがって格子 QCD にも“高温”の極限で同じような面積法則が存在し，これがクォーク間の線型閉じ込めポテンシャルに対応することがのちにわかる．

式 (15.54) の指数関数を

$$\begin{aligned} \exp(-H_{\square}/kT) &= \exp((J/kT)S_1S_2S_3S_4) \\ &= \cosh\beta + S_1S_2S_3S_4 \sinh\beta \end{aligned} \tag{15.59}$$

と書き直す．ここで

$$\beta = J/kT \tag{15.60}$$

と定義し，指数関数を展開して

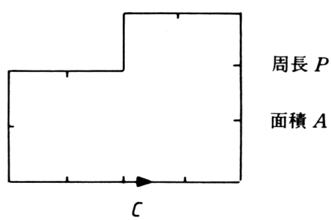


図 15.15 Wegner-Wilson のスピン閉線

$$(S_1S_2S_3S_4)^2=+1 \tag{15.61}$$

の性質を使った．和の指数関数を指数関数の和と書き直して

$$\exp(-\sum H_{\square}/kT)=\prod_{\square}(\cosh\beta+S_1S_2S_3S_4\sinh\beta) \tag{15.62}$$

を得る．ここで，$S_1S_2S_3S_4$ は適当な閉路（プラック）□ のまわりのスピンの積である．統計力学における演算子 Q の期待値は

$$\langle Q\rangle=\frac{\sum_{\text{配位}} Q\mathrm{e}^{-H/kT}}{\sum_{\text{配位}}\mathrm{e}^{-H/kT}} \tag{15.63}$$

で与えられる．この式は単位演算子の期待値が 1 という望ましい性質を備えている．この式を Wegner-Wilson の演算子 W に適用し，分母子を同じ個数の $(\cosh\beta)$ 因子で割れば

$$W(C)=\langle\prod_C S_i\rangle=\frac{\sum_{\text{配置}}(\prod_C S_i)\prod_{\square}(1+S_1S_2S_3S_4\tanh\beta)}{\sum_{\text{配置}}\prod_{\square}(1+S_1S_2S_3S_4\tanh\beta)} \tag{15.64}$$

を得る．これは何の役に立つであろうか．T が大きいとき β および $(\tanh\beta)$ は非常に小さくなる．そこで $W(C)$ を $(\tanh\beta)$ の冪に展開しよう．このような“高温級数展開”を任意の次数まで遂行するきわめて強力な方法も存在するが，一番効く次数だけに止める．それにはいささかの思慮と計算力でこと足りる．分子

$$\sum_{\text{配位}}\left(\prod_C S_i\right)\prod_{\square}(1+S_1S_2S_3S_4\tanh\beta) \tag{15.65}$$

だけ考えればよい．

あきらかに主要項は，格子のすべての閉路にわたる積の中から $(\tanh\beta)$ の

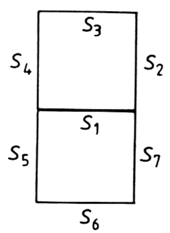


図 15.16　2 次元格子．結合スピン S_1 は作用では 2 つのプラケットに寄与する．

もっとも少ない数の因子を含む項である．なぜ“1”の項をすべての閉路についてとらないのか．これは回路 C 上のそれぞれの連結上の因子 S_i のため，できないのである．簡単のため2次元の格子を考え，このような因子を考えてみよう．ひとつの連結は2つの閉路に寄与する（図15.16参照）．

分子ではスピン配位の和が効く．これは Ising スピン Z(2) の値 ± 1 の和である．連結スピン S_1 の2つの値にわたる和

$$\sum_{S_1=\pm 1} S_1(1+S_1S_2S_3S_4 \tanh\beta)(1+S_1S_5S_6S_7 \tanh\beta) \tag{15.66}$$

を考える．2つの閉路項の中から1をとれば

$$\sum_{S_1=\pm 1} S_1=0 \tag{15.67}$$

から和はゼロになってしまう．

それぞれの閉路項からひとつの $(\tanh\beta)$ を取り出せば

$$\sum_{S_1=\pm 1} (S_1)^2=2 \tag{15.68}$$

だからゼロでない寄与が生ずる．

したがってゼロにならないためには，回路 C の上のすべての連結について $(\tanh\beta)$ 項をとらなくてはならない，さらに，ほかの連結スピンのひとつ，例えば S_3 にわたってスピン和をとるとき，ゼロにならないためにはこの閉路から $(\tanh\beta)$ をとらなくてはならない，というようにして，実際 $(\tanh\beta)$ 因子を最小個数含む主要次数の寄与は，回路で囲まれた内部の面積を，最小個数の閉路で“タイル敷き”にするところから生ずる．2次元では必然的に平面であるが，高次元では凸部の閉じた面積からくる主要項ではない次数の寄与がある．したがって回路 C に対し，高温領域の主要項への寄与は C で囲まれたそれぞれの

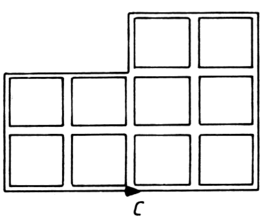


図 15.17　周辺 C の最少タイル化．高温で Wegner-Wilson 閉線に主要な寄与を行う．

閉路(図15.17参照)からひとつずつ(tanh β)因子をとることに対応する．面積 A に A 個のタイルがあれば

$$W(C) \sim (\tanh\beta)^A \sim \exp[A\,\mathrm{In}(\tanh\beta)] \tag{15.69}$$

となり，これがループの秩序パラメーターの面積法則である．

Wilsonの格子ゲージ理論の定式化は，ここまでくれば難しくない．Wilsonの作用も閉路変数で定義され，Z(2)ゲージ理論と同じく，ゲージ場の変数も格子の連結に対応している．今度はZ(2)の2つの群要素 ±1 のかわりに，各連結は対応するゲージ群の要素と結びついている．

$$\mathrm{U}(1) \quad U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{15.70}$$

$$\mathrm{SU}(3) \quad U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\theta}/2} \tag{15.71}$$

これらの格子理論はあきらかに局所的不変性の要求を満たすが，θ をしかるべきゲージ場と関係させなくてはならない．QEDに対応するはずのU(1)の場合を考えよう．

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{15.72}$$

および

$$S(U) = \sum_B S_B \tag{15.73}$$

ととり，S_B を閉路のまわりの連結変換の積とする．これがよく知られたQEDの作用に外挿できることを示そう．

$$\theta = agA_\mu \tag{15.74}$$

および

$$\sum_{\square} \to \int \frac{\mathrm{d}^4x}{a^4} \tag{15.75}$$

より S は形式的に格子常数 a がゼロになる極限で

$$S \to \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{15.76}$$

になることが示される．

すでに述べたように，“高温”極限は格子上では強い結合（結合 g は特定の格子定数 a による）に対応する．高温/強結合極限では，Z(2)ゲージの場合と同じく，U(1)およびSU(3)格子ゲージ理論のどちらに対しても，面積法則に従うふるまい

$$\text{強結合} \qquad W(C) \sim e^{-A} \tag{15.77}$$

を容易に得ることができる．Wilson はゲージ理論のこの面積法則を，閉じ込めの相のしるしと解釈した．t および R で指定される長い矩形の回路に対しては (図 15.18 参照)，閉路演算子の効果は，荷電粒子の対創生が起こり，急速に距離 R で隔てられ，系が時間 t の間に発展して，両電荷が消滅することと等価である．このとき $W(C)$ は静電ポテンシャル

$$W(C) \sim e^{-V(R)t} \tag{15.78}$$

の目安になる．したがって面積法則のふまいは R に比例するポテンシャル，すなわち閉じ込めの力の伝統的表象に対応する．

このような閉じ込めの相は，もちろん SU(3) には望ましいが U(1) (QED) には望ましくない．例えば電子は閉じ込められていないからである．この明白な問題をどう解決したらよいか．QCD の場合は，漸近自由性のため距離に比例して有効結合定数が小さくなる．連続体の物理と結びつけるには，格子はあまり粗くてはならず，連続体 QCD を近似する格子ハドロンの内部に十分多数の離散点が存在しなくてはならない．この QCD の連続体近似を行うことは，格子の上で g^2 をゼロにとることに対応する．したがって，大きい g^2 の値について閉じ込めのしるしを得たからといって，すべての g^2 がゼロに向かうときにもこの性質が維持され，また g^2 を小さくしてゆくとき (すなわち“温度”を下げるとき) 相転換が起こらないことを確かめなくてはならない．QED ではこれと対照的に，電子は閉じ込められていないから，結合が変化して連続体の極限に近づい

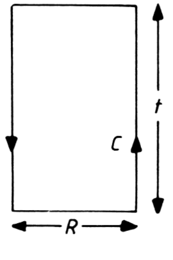


図 15.18 クォーク・反クォークポテンシャルの Wilson 閉線回路

たとき，相転移がなければならない．(QED は漸近的に自由な理論ではないから，これは結合がゼロでない値で起こることに注意せよ．) この相転移は，Wilson ループが面積法則から周長法則に変わる乗り換えのとき見えるはずである．

格子 QCD は 1970 年初期に Wilson によってはじめられたが，Creuz (1979)

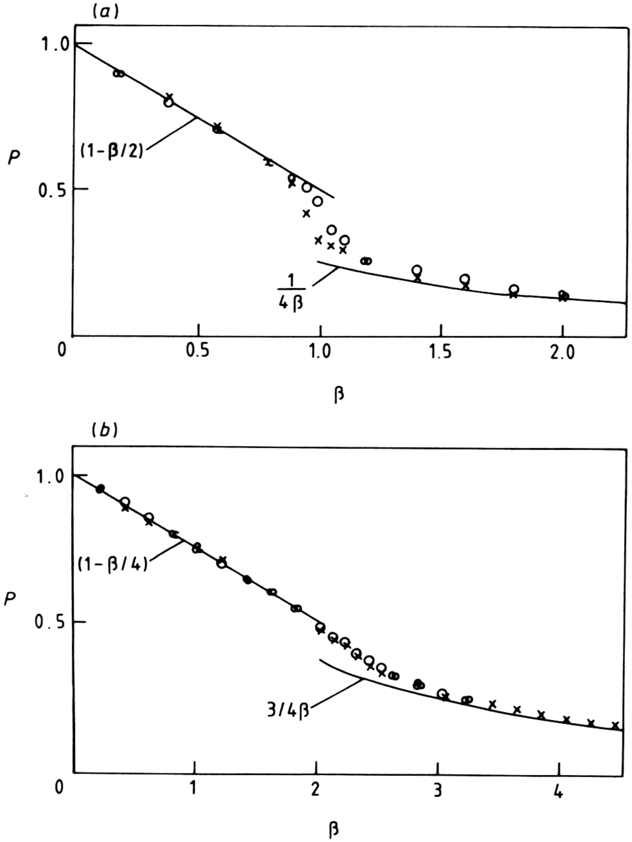


図 15.19　4 次元格子ゲージ理論の熱循環過程の数値模擬例 (Creutz, 1983)．(*a*) U 1，(*b*) SU (2)．実線は高温および低温の場合の低次の理論的予言．×は加熱，○は冷却．

が顕著な数値的シミュレーションを行うまで，場の理論の非摂動論的ふるまいを研究する正攻法とはならなかった．Creuz は，U(1) および SU(2) 格子理論のふるまいを簡単なモンテ・カルロ法で模擬した．図 15.19 は，両理論について閉路エネルギー P が $\beta(\sim 1/T)\sim 1/g^2$ の関数として“ヒステレシス”周期についてどう変わるか表したものである．ヒステレシス周期では，系がある温度で平衡し，エネルギーが測られると温度が少し変化し，系が再び平衡に達する．このようにして系は高温度（小さい β）から出発し，冷え，そして再び熱せられる．4 次元 U(1) の図から見られるように，領域の真ん中あたりにヒステレシス・ループを示すあきらかな兆しがあり，相転移の存在を示唆する．一方これとは対照して，4 次元 SU(2) の場合にはこのような効果はない．これこそまさに期待していた結果である．可換 U(1) ゲージ理論では閉じ込めのない相への転移があるが，非可換 SU(2) 理論では，結合定数のすべての値に対して閉じ込めが継続する．

8^4 という小さな格子の上で行われたこの初期の数値計算から出発して，大規模な計算が発展してきた．今まで紹介してきた格子理論にはゲージ場しか含まれていないが，QED, QCD の実際的なシミュレーションにはフェルミオンも含まれなくてはならない．ハドロンのスペクトル，グルーボール，構造関数，形状因子などを調べるたくさんの研究が進行中であり，より洗練されたシミュレーションの技法やどんどん強力な計算機が利用されている．最近のベクトル超大型計算機のほか，粒子物理学者は QCD の現実的なシミュレーションだけのための特殊目的のパラレル計算機さえも建設している．前途有望な見通しはあるが，QCD のスペクトルの最終的な解を得るのは，おそらく何年も先のことであろう．

まとめ

(1) お化け閉線の必要性．

（i） 1 光子中間状態に対する Feynman 図形の虚数部の差，ユニタリティー関係式．

（ii） 差は Feynman 図形中の内部光子線に対する非物理的 $(\varepsilon\cdot k\neq 0)$ 偏極状態による．

（iii）　差はWardの恒等式によって消える．
（iv）　QEDでは非物理的寄与がない．
（v）　gg中間状態に対しては，非可換ゲージ理論の場合非物理的寄与が消えない．
（vi）　望ましからぬ残存項はグルーオンの閉線からくる．
（vii）　相殺項を“便宜的”に導入すること．お化け閉線．

(2)　大統一化．
（i）　エネルギーがあるM_Xより非常に大きい場合にだけ成り立つと期待される対称性．
（ii）　M_Xの予言．
（iii）　陽子の寿命，理論と実験．
（iv）　バリオンの不安定化について一般論．
（v）　$\sin^2\theta_W$の予言．
（vi）　くりこみ効果．
（vii）　レプトン質量の予言．
（viii）　電荷の量子化．

(3)　閉じ込め．
（i）　タイプIIの超伝導体．
（ii）　中間子の模型として，磁気単極子に終わる磁束フィラメント，単極子の閉じ込め．
（iii）　電荷を閉じ込めるための電気と磁気の入れ替え．

(4)　格子ゲージ理論．
（i）　紫外発散の抑制としての格子．
（ii）　径路積分の定式化．
（iii）　統計力学とその類推．
（iv）　WegnerのZ(2)ゲージIsing模型と閉線（ループ）パラメーター．
（v）　Wilsonループ．
（vi）　U(1)およびSU(2)理論における閉じ込め相と非閉じ込め相．

問題

15.1 式 (15.10) を証明せよ．

ヒント：共変性より2次のテンソル $P_{\mu\nu}$ は，A，B，C，D，E を不変関数として

$$P_{\mu\nu}=Ag_{\mu\nu}+Bk_\mu k_\nu+Ck_\mu t_\nu+Dk_\nu t_\mu+Et_\mu t_\nu$$

の形を持たなくてはならない．$g_{\mu\nu}$，$k_\mu k_\nu$，……などのほかに2階のテンソルは作れないからである．この式に $\varepsilon^\mu(k, \lambda')$ を縮約し，式(12.8) を用いれば $A=-1$ が導かれることを示せ．次に，k^μ，k^ν で縮約して $E=0$ であることを示せ．k と t を用いて縮約し，$C(=D)$ および B の値を求めよ．

付録D　Dirac代数と対角和の諸定理

D.1　Dirac 代数

D.1.1　γ 行列

基本的な反交換関係

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{D.1}$$

を用いて，次の諸公式を証明することができる．

$$\gamma_\mu\gamma^\mu=4 \tag{D.2}$$

$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu=-2\not{a} \tag{D.3}$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu=4a\cdot b \tag{D.4}$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu=-2\not{c}\not{b}\not{a} \tag{D.5}$$

$$\not{a}\not{b}=-\not{b}\not{a}+2a\cdot b \tag{D.6}$$

一例として式(D.6) を証明してみよう．

$$\begin{aligned}\not{a}\not{b}&=a_\mu b_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\\&=a_\mu b_\nu(-\gamma^\nu\gamma^\mu+2g^{\mu\nu})\\&=-\not{b}\not{a}+2a\cdot b\end{aligned}$$

D.1.2　γ_5 の性質

γ_5 を

$$\gamma_5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{D.7}$$

で定義する．通例の表示では（108 ページの脚注参照）

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\-\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix} \tag{D.8}$$

であるから，γ_5 は

$$\gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{D.9}$$

で表される．定義，あるいはあからさまな行列の形から

$$\gamma_5^2=1 \tag{D.10}$$

および

$$\{\gamma_5,\ \gamma^\mu\}=0 \tag{D.11}$$

がたやすく証明される．すなわち，γ_5 はすべての γ 行列と反交換し，2乗は単位行列である．完全反対称テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases} +1 & 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \text{の偶順列に対して} \\ -1 & 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \text{の奇順列に対して} \\ \ \ 0 & 2\ \text{つ以上の指標が同じとき} \end{cases} \tag{D.12}$$

で定義すると，γ_5 は

$$\gamma_5=\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{D.13}$$

と表すこともできる．この形から

$$\gamma_5\gamma_\sigma=\frac{\mathrm{i}}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \tag{D.14}$$

および恒等式

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho=g^{\mu\nu}\gamma^\rho-g^{\mu\rho}\gamma^\nu+g^{\nu\rho}\gamma^\mu+\mathrm{i}\gamma_5\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma \tag{D.15}$$

を導くことができる．

D.1.3 スピノール行列要素のエルミート共役

Γ が γ 行列の任意の積の和であるとき

$$[\bar{u}(p',\ s')\Gamma u(p,\ s)]^\dagger=\bar{u}(p,\ s)\bar{\Gamma}u(p',\ s') \tag{D.16}$$

$$\bar{\Gamma}\equiv\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{D.17}$$

である．たとえば

$$\overline{\gamma^\mu}=\gamma^\mu \tag{D.18}$$

$$\overline{\gamma^\mu\gamma_5}=\gamma^\mu\gamma_5 \tag{D.19}$$

が成り立つ．

D.1.4 スピン和と射影演算子

正エネルギー状態への射影演算子

$$[\Lambda_+(p)]_{\alpha\beta} \equiv \sum_s u_\alpha(p,\ s)\bar{u}_\beta(p,\ s) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \tag{D.20}$$

負エネルギー状態への射影演算子

$$[\Lambda_-(p)]_{\alpha\beta} \equiv -\sum_s v_\alpha(p,\ s)\bar{v}_\beta(p,\ s) = (-\not{p} + m)_{\alpha\beta} \tag{D.21}$$

これらの表式はスピノールの規格化が

$$\bar{u}u = 2m \qquad \bar{v}v = -2m \tag{D.22}$$

で与えられる特定の場合にのみ成立することに注意せよ.

D.2　対角和（跡）の定理

(1)
$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{1} = 4 \tag{D.23}$$

(2)
$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0 \tag{D.24}$$

(3)
$$\mathrm{Tr}\,（奇数個の\ \gamma）= 0 \tag{D.25}$$

（証明）　奇数の n に対して

$$T \equiv \mathrm{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\ldots\not{a}_n) \tag{D.26}$$

を考える. $1 = (\gamma_5)^2$ を最後に挿入すれば

$$T = \mathrm{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\ldots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5) \tag{D.27}$$

である.

$$\not{a}\gamma_5 = -\gamma_5\not{a} \tag{D.28}$$

をくり返し用いて, T の中の最初の γ_5 を一番前に称動すると n 個の負号が現れる.

$$\begin{aligned} T = \mathrm{Tr}(\not{a}_1\ldots\not{a}_n) &= (-1)^n\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{a}_1\ldots\not{a}_n\gamma_5) \\ &= (-1)^n\mathrm{Tr}(\not{a}_1\ldots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5) \quad （対角和の循環的性質） \\ &= -\mathrm{Tr}(\not{a}_1\ldots\not{a}_n) \quad （n\ が奇数の場合） \end{aligned} \tag{D.29}$$

したがって n が奇数であれば T は 0 である.

(4)
$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a\cdot b \tag{D.30}$$

（証明）

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}) \\ &= \frac{1}{2}a_\mu b_\nu \mathrm{Tr}(\mathbf{1}\cdot 2g^{\mu\nu}) \\ &= 4a\cdot b \end{aligned}$$

(5) $$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4[(a\cdot b)(c\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)-(a\cdot c)(b\cdot d)] \tag{D.31}$$

（証明）式(D.6) の結果を用いれば

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}(\not{c}\not{d})-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{a}\not{c}\not{d}) \tag{D.32}$$

が成り立つ．これは対角和の中で $\not{a}$ をひとつ右へ移す公式である．こうして $\not{a}$ を右へ右へと移しかえ，式(D.30) を用いれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})&=2(a\cdot b)4(c\cdot d)-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}(\not{b}\not{d})+\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{a}\not{d})\\&=8(a\cdot b)(c\cdot d)-8(a\cdot c)(b\cdot d)+8(b\cdot c)(a\cdot d)-\mathrm{Tr}(\not{b}\not{c}\not{d}\not{a})\end{aligned} \tag{D.33}$$

を得る．対角和の中で，最後の因子を最初に持ってきても対角和の値は変わらないから，証明終わり．

(6) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}]=0 \tag{D.34}$$

γ_5 は 4 個の γ 行列の積だから，これは(3)の特別な場合である．

(7) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}\not{b}]=0 \tag{D.35}$$

これは(6)ほど自明ではない．しかし γ 行列の積をあからさまに書き上げれば，γ の反可換性からただちに証明することができる．

(8) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}]=0 \tag{D.36}$$

再び(3)の特別な場合である．

(9) $$\mathrm{Tr}[\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}]=4\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \tag{D.37}$$

α，β，γ，δ に 0，1，2，3 のいろいろな数値を指定して考察すればよい．ε テンソルは順列に対して正しい符号を与える．

ε テンソルは，3 次元の反対称テルソル ε_{ijk} の 4 次元的拡張である．3 次元の場合はよく知られた関係式

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_i=\varepsilon_{ijk}b_jc_k \tag{D.38}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k \tag{D.39}$$

が成り立つ．

付録F　QED，QCD，GSW理論の枝線図形に対する Feynman の規則

2 体→2 体反応の断面積

$$d\sigma=\frac{1}{4[(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2]^{1/2}}|F|^2 \mathrm{dLips}(s\ ;\ p_3,\ p_4) \tag{F.1 a}$$

1 体→2 体崩壊の崩壊率

$$d\Gamma=\frac{1}{2m_1}|F|^2 \mathrm{dLips}(m_1^2\ ;\ p_2,\ p_3) \tag{F.1 b}$$

終状態が 2 個の同種粒子である場合は，余分な因子 1/2 をこれらの公式に乗じなくてはならない．

振幅 F は考えている過程の不変行列要素で，それぞれの理論の Feynman 規則で与えられる．スピンが 0 でない粒子の偏りを考えない断面積は，初めのスピン成分について平均し終わりのスピン成分については和をとって求める．

F.1　QED の枝線図形に対する規則

F.1.1　外線粒子

スピン 1/2 粒子

図形（グラフ）にはいってくるフェルミオンまたは反フェルミオンにはそれぞれスピノール

$$u(p,\ s),\qquad v(p,\ s) \tag{F.2}$$

を付す．図形から出てゆくフェルミオンまたは反フェルミオンにはそれぞれスピノール

$$\bar{u}(p',\ s'),\quad \bar{v}(p',\ s') \tag{F.3}$$

を付す．

光子

図形にはいってくる光子には偏極ベクトル

$$\varepsilon_\mu(k,\ \lambda) \tag{F.4}$$

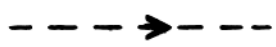
を付し，図形から出てゆく光子には偏極ベクトル

$$\varepsilon_\mu^*(k',\ \lambda') \tag{F.5}$$

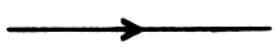
を付す．

F.1.2　伝播関数

スピン 0 の粒子

 $=\dfrac{\mathrm{i}}{p^2-m^2}$ (F.6)

スピン 1/2 の粒子

 $=\dfrac{\mathrm{i}}{\not{p}-m}=\mathrm{i}\dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2}$ (F.7)

光子

一般的な ξ ゲージに対して

 $=\dfrac{\mathrm{i}}{k^2}\left(-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\dfrac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)$ (F.8)

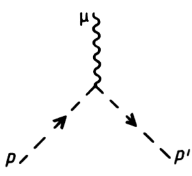
計算は通常 $\xi=1$ とおいた Lorentz または Feynman ゲージで行う．このとき光子の伝播関数は

 $=\mathrm{i}\dfrac{(-g^{\mu\nu})}{k^2}$ (F.9)

である．

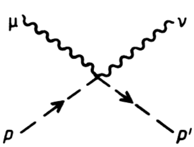
F.1.3　頂点

スピン 0 の粒子



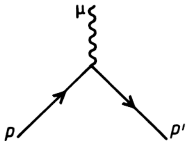
$-\mathrm{i}e(p+p')_\mu$

(電荷 $+e$ に対して)　(F.10)



$2\mathrm{i}e^2 g_{\mu\nu}$　(F.11)

スピン 1/2 の粒子



$-\mathrm{i}e\gamma_\mu$

(電荷 $+e$ に対して) (F.12)

F.2 QCD の枝線図形に対する規則

F.2.1 外線粒子

クォーク

SU(3) カラー自由度はあからさまに書き入れない．スピノールは 3(カラー) ×4(時空) の成分を持つ．QED と同じく，図形にはいってくるクォークあるいは反クォークにはスピノール

$$u(p,\ s),\ \ v(p,\ s) \tag{F.13}$$

を付し，図形から出てゆくクォークあるいは反クォークにはスピノール

$$\bar{u}(p',\ s'),\ \ \bar{v}(p',\ s') \tag{F.14}$$

を付す．

グルーオン

スピン 1 の偏極ベクトルのほかに，外線のグルーオンは“カラー偏極”ベクトル a^α ($\alpha=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 8$) を持ち，特定のカラー状態を標識する．図形にはいってくるグルーオンには偏極ベクトル

$$\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)a^\alpha \tag{F.15}$$

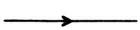
を付し，図形から出てゆくグルーオンには偏極ベクトル

$$\varepsilon_\mu^*(k',\ \lambda')a^{*\alpha} \tag{F.16}$$

を付す．

F.2.2 伝播関数

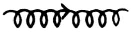
クォーク



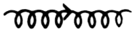
$$=\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m}=\mathrm{i}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2} \tag{F.17}$$

グルーオン

一般的な ξ ゲージに対して


$$=\frac{\mathrm{i}}{q^2}\left(-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)\delta^{\alpha\beta} \tag{F.18}$$

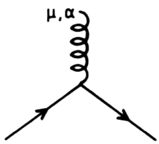
Feynman ゲージでは


$$=\frac{\mathrm{i}}{q^2}(-g^{\mu\nu})\delta^{\alpha\beta} \tag{F.19}$$

に帰着し，通常もっとも便利な形である．

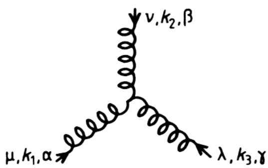
F.2.3 頂点

クォーク・グルーオン頂点



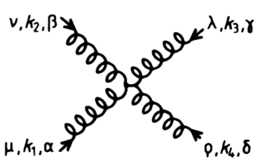
$$-\mathrm{i}g_s\frac{\lambda^\alpha}{2}\gamma_\mu \tag{F.20}$$

3 グルーオン頂点



$$-g_s f_{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\lambda+g_{\nu\lambda}(k_2-k_3)_\mu+g_{\lambda\mu}(k_3-k_1)_\nu] \tag{F.21}$$

4 グルーオン頂点



$$\begin{aligned}-\mathrm{i}g_s^2[&f_{\alpha\beta\eta}f_{\gamma\delta\eta}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})\\&+f_{\alpha\delta\eta}f_{\beta\gamma\eta}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})\\&+f_{\alpha\gamma\eta}f_{\delta\beta\eta}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})]\end{aligned} \tag{F.22}$$

以上の規則は，QCD の枝線図形の計算にのみ成り立つことを銘記する必要がある（15.1 節参照）．

F.3 GSW 理論（電弱相互作用の標準モデル）の枝線図形に対する規則

枝線図形の振幅を計算するにあたっては，非物理的な粒子が現れない U ゲージの Feynman 規則を用いるのがもっとも便利である（第 13 章，第 14 章）．U

ゲージの規則を，以下レプトンおよびクォークの2重子(e, ν_e), (μ, ν_μ), (u, d_c)および(c, s_c)に対して与える．電弱相互作用はカラーを感知しないから，異なるクォーク・カラーに対応するクォークの遷移ひとつひとつに対して，3種のカラーはそれぞれ同じ大きさの寄与を与える．

F.3.1 外線粒子

レプトンおよびクォーク

図形にはいってくるとき

$$u(p,\ s)\ \text{または}\ v(p,\ s) \tag{F.23}$$

図形から出てゆくとき

$$\bar{u}(p',\ s')\ \text{または}\ \bar{v}(p',\ s') \tag{F.24}$$

ベクトル・ボソン

図形にはいってくるとき

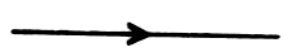
$$\varepsilon_\mu(k,\ \lambda) \tag{F.25}$$

図形から出てゆくとき

$$\varepsilon_\mu^*(k',\ \lambda') \tag{F.26}$$

F.3.2 伝播関数

レプトンおよびクォーク



$$=\frac{i}{\not p - m}=i\frac{\not p + m}{p^2-m^2} \tag{F.27}$$

(ニュートリノは通常質量を持たないと仮定する.)

ベクトル・ボソン (U ゲージ)

$W^\pm$, Z^0 

$$=\frac{i}{k^2-M_V^2}(-g^{\mu\nu}+k^\mu k^\nu/M_V^2) \tag{F.28}$$

荷電W粒子の質量 M_W は

$$\frac{G_F}{2^{1/2}}=\frac{g^2}{8M_W^2} \tag{F.29}$$

で与えられる．$e=g\sin\theta_W$ (規約により $e>0$) であるから

$$M_W=\frac{e}{2^{5/4}G_F^{1/2}\sin\theta_W}\simeq\left(\frac{37.3}{\sin\theta_W}\right)\mathrm{GeV}/c^2 \tag{F.30}$$

中性Z粒子の質量 M_Z は，荷電W粒子の質量 M_W と

$$M_Z=M_W/\cos\theta_W \tag{F.31}$$

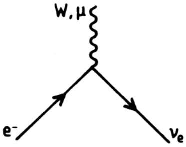
の関係にある.

Higgs スカラー粒子

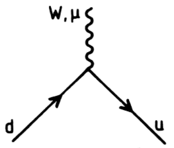
$$- - - \rightarrow - - - = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - \mu^2} \qquad \text{(F.32)}$$

F.3.3 頂点

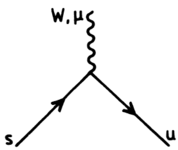
荷電カレントによる弱い相互作用



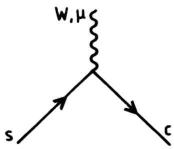
$$-\mathrm{i}\frac{g}{2^{1/2}}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2} \qquad \text{(F.33)}$$



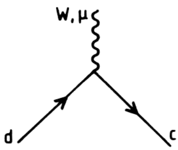
$$-\mathrm{i}\frac{g}{2^{1/2}}\cos\theta_{\mathrm{C}}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2} \qquad \text{(F.34)}$$



$$-\mathrm{i}\frac{g}{2^{1/2}}\sin\theta_{\mathrm{C}}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2} \qquad \text{(F.35)}$$



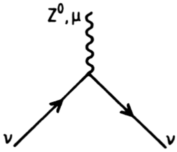
$$-\mathrm{i}\frac{g}{2^{1/2}}\cos\theta_{\mathrm{C}}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2} \qquad \text{(F.36)}$$



$$-\mathrm{i}\frac{g}{2^{1/2}}(-\sin\theta_{\mathrm{C}})\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2} \qquad \text{(F.37)}$$

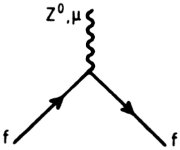
中性カレントによる弱い相互作用

質量を持たないニュートリノ



$$\frac{-ie}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\frac{1}{2}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2} \tag{F.38}$$

質量を持つフェルミオン



$$\frac{-ie}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\gamma_\mu\left(c_L^f\frac{1-\gamma_5}{2}+c_R^f\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{F.39}$$

ただし e^-, μ^- に対して

$$c_L=-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W,\qquad c_R=\sin^2\theta_W \tag{F.40}$$

u, c に対して

$$c_L=+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W,\qquad c_R=-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W \tag{F.41}$$

d, s に対して

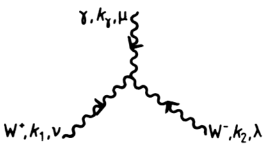
$$c_L=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_W,\qquad c_R=\frac{1}{3}\sin^2\theta_W \tag{F.42}$$

(質量を持たないニュートリノに対しては $c_L=1/2$, $c_R=0$)

ベクトル・ボソンの結合

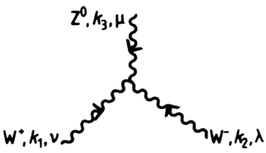
(a) 3 枝結合 (3 重線結合)

γW^+W^- 頂点



$$ie[g_{\nu\lambda}(k_1-k_2)_\mu+g_{\lambda\mu}(k_2-k_\gamma)_\nu+g_{\mu\nu}(k_\gamma-k_1)_\lambda] \tag{F.43}$$

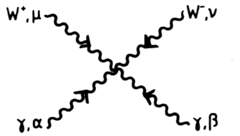
$Z^0W^+W^-$ 頂点



$$i\frac{e\cos\theta_W}{\sin\theta_W}[g_{\nu\lambda}(k_1-k_2)_\mu+g_{\lambda\mu}(k_2-k_3)_\nu+g_{\mu\nu}(k_3-k_1)_\lambda] \tag{F.44}$$

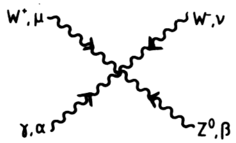
（b） 4 枝結合（4 重線結合）

$\gamma\gamma W^+W^-$ 頂点



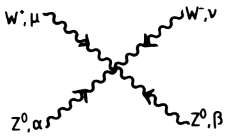
$$-ie^2(2g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}-g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \qquad \text{(F.45)}$$

$\gamma Z^0W^+W^-$ 頂点



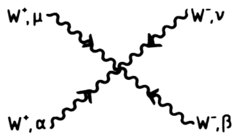
$$-ie^2\cot\theta_W(2g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}-g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \qquad \text{(F.46)}$$

$Z^0Z^0W^+W^-$ 頂点



$$-ie^2\cot^2\theta_W(2g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}-g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \qquad \text{(F.47)}$$

$W^+W^-W^+W^-$ 頂点

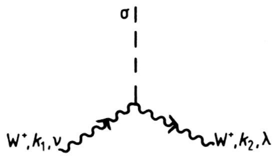


$$\frac{ie^2}{\sin^2\theta_W}(2g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}-g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}-g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) \qquad \text{(F.48)}$$

Higgs 粒子の結合

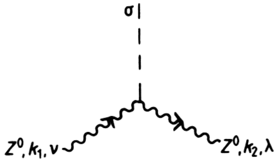
（a） 3 枝結合（3 重線結合）

σW^+W^- 頂点



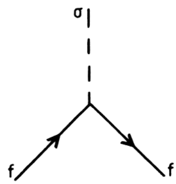
$$\frac{ie}{\sin\theta_W}M_W g_{\nu\lambda} \qquad \text{(F.49)}$$

$\sigma Z^0 Z^0$ 頂点



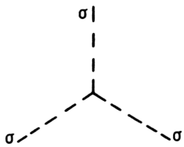
$$\frac{i2e}{\sin 2\theta_W} M_Z g_{\nu\lambda} \qquad \text{(F.50)}$$

フェルミオンの湯川結合（質量 m_f を持つフェルミオン）



$$-\frac{ie}{2\sin\theta_W}\frac{m_f}{M_W} \qquad \text{(F.51)}$$

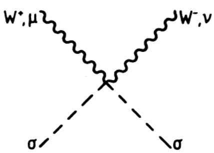
3 枝自己結合



$$-i\frac{3\mu^2 e}{2M_W \sin\theta_W} \qquad \text{(F.52)}$$

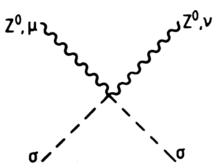
（b） 4 枝結合（4 重線結合）

$\sigma\sigma W^+ W^-$ 頂点



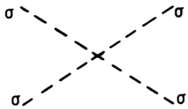
$$\frac{ie^2}{2\sin^2\theta_W} g_{\mu\nu} \qquad \text{(F.53)}$$

$\sigma\sigma Z^0 Z^0$ 頂点



$$\frac{i2e^2}{\sin^2 2\theta_W} g_{\mu\nu} \qquad \text{(F.54)}$$

4 枝自己結合



$$-\frac{i3\mu^2 e^2}{4M_W^2 \sin^2\theta_W} \tag{F.55}$$

（この項は式(14.156）から ρ を σ とおきかえ，組み合わせの因子 6 を与えて得られる．これは σ^3 の項が 6 通りに寄与するからであって，$A^\mu A_\mu$ の項に因子 2 を与えることと照応する．）

最後に，ここで F2.3 節で現れた SU(3) のラムダ行列の例を挙げておく．

$$\lambda_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

問題略解

〈8章〉

8.1 成分が式(8.38)で与えられている行列を書き下すことは容易である．上添字の (1) は $T=1$ (3行3列) を表す記号だから省略する．

$$T_1=-\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad T_2=-\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3=-\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これらの行列が交換関係(8.37)

$$T_iT_j-T_jT_i=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}T_k$$

を満たすことを証明するには，この式の (ln) 要素をとり (擬標 m についての和記号を省略)

$$(T_i)_{lm}(T_j)_{mn}-(T_j)_{lm}(T_i)_{mn}=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}(T_k)_{ln}$$

が成り立つことを示せばよい．行列要素をあからさまに与える式(8.38)を用いて左辺を計算すれば

$$-\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jmn}+\varepsilon_{jlm}\varepsilon_{imn}=\varepsilon_{mil}\varepsilon_{mjn}-\varepsilon_{mjl}\varepsilon_{min}$$

式(10.106) を用いて m の和を行えば

$$\delta_{ij}\delta_{ln}-\delta_{in}\delta_{lj}-\delta_{ji}\delta_{ln}+\delta_{jn}\delta_{li}=\delta_{jn}\delta_{li}-\delta_{in}\delta_{lj}$$

同じように右辺を計算すれば (k についての和)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kln}=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kln}=\delta_{il}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jl}$$

∴　左辺＝右辺

8.2 式(8.53) の中で $\mathbf{T}=1/2$ を意味する添字を省略して記す．

$$(1+\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\mathbf{T}})\hat{\psi}(1-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\mathbf{T}})=(1-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\hat{\psi} \tag{8.53}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ を 1 次までとると

$$\hat{\psi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\mathbf{T}}\hat{\psi}-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\psi}\hat{\mathbf{T}}=\hat{\psi}-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2\hat{\psi}$$

$$\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\hat{\mathbf{T}},\ \hat{\psi}]=-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2\hat{\psi}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$（の各成分）は任意であるから

$$[\hat{\mathbf{T}},\ \hat{\psi}]=-\boldsymbol{\tau}/2\hat{\psi} \tag{8.54}$$

8.3 $\mathbf{T}=1/2$ を示す上添字 1/2 を省略して式(8.55) は

$$\hat{\mathbf{T}}\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')=\int\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}\cdot\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}') \tag{8.55}$$

$$\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')\hat{\mathbf{T}}=\int\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$

と書ける．反交換関係

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}),\ \hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{X}')\}=\delta^3(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}')\delta_{\alpha\beta},\ \{\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}),\ \hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{X}')\}=\{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X}),\ \hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{X}'),\}=0$$

を用いて

$$\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})=-\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')+\delta^3(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}')\delta_{\alpha\lambda}$$

を得るから

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')\hat{\mathbf{T}}&=-\int\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})\cdot\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')\cdot(\boldsymbol{\tau}/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{\tau}/2)_{\alpha\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X}')\\&=\int\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{X}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{\tau}/2\cdot\hat{\psi}(\boldsymbol{X}'))_\alpha\end{aligned}$$

である．

$$\therefore\quad[\hat{\boldsymbol{T}},\ \hat{\psi}(\boldsymbol{X}')]=-\boldsymbol{\tau}/2\hat{\psi}(\boldsymbol{X}')$$

8.4 式(8.55) で与えられる演算子は上添字 1/2 を省略する．

$$\hat{T}_i=\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$

$$\hat{T}_j=\int\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')\cdot(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\psi_\mu(\boldsymbol{X}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}'$$

$$\hat{T}_i\hat{T}_j=\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{X})\cdot\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')\cdot(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\psi_\mu(\boldsymbol{X}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}'$$

$$\hat{T}_j\hat{T}_i=\int\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\psi_\mu(\boldsymbol{X})\cdot\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X}')\cdot(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{X}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}'$$

第二の積分は $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}'$ を入れ替えても変わらない．また行列 $\boldsymbol{\tau}$ の要素は数であ

る．

$$\hat{T}_j\hat{T}_i=\int\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')\cdot(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X}')\cdot\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}'$$

反交換関係より

$$\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X}')\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})=-\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X}')+\delta^3(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}')\delta_{\alpha\mu}$$

$$\hat{T}_j\hat{T}_i=\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}'$$
$$+\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\mu\beta}\hat{\psi}_3(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$

この第1項で再び $\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')$ と $\hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{X})$ を交換すると

$$\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')\hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{X})=-\hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{X})\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')+\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}')\delta_{\beta\lambda}$$

$$T_jT_i=\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{X})\cdot\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}'$$
$$-\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$
$$+\int\hat{\psi}_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\mu\beta}\hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$

$$\therefore\quad[\hat{T}_i,\ \hat{T}_j]=\int\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$
$$-\int\psi_\lambda^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\mu\beta}\hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$

第2項で擬標を $\lambda\to\alpha$，$\mu\to\lambda$，$\beta\to\mu$ と書き換えても差し支えないから

$$[T_i,\ T_j]=\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})[(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\lambda\mu}-(\boldsymbol{\tau}_j/2)_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\lambda\mu}]\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$
$$=\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_i/2\cdot\boldsymbol{\tau}_j/2-\boldsymbol{\tau}_j/2\cdot\boldsymbol{\tau}_i/2)_{\alpha\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$

式(8.20) より

$$[\boldsymbol{\tau}_i/2,\ \boldsymbol{\tau}_j/2]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\tau}_k/2$$

が成り立つから

$$[T_i,\ T_j]=\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})\cdot\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\cdot(\boldsymbol{\tau}_k/2)_{\alpha\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$
$$=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\int\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\tau}_k/2)_{\alpha\mu}\hat{\psi}_\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$$
$$=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{T}}_k$$

8.5 まず式(8.131)，(8.132) から式(8.133) が導かれることを示そう．

$$
\begin{aligned}
D^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu} &= (\partial^{\nu}+\mathrm{i}g\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\boldsymbol{W}_{\nu} \\
&= \partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\boldsymbol{W}_{\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{\mu}D^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu} &= (\partial^{\mu}+\mathrm{i}g\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})(\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\boldsymbol{W}_{\nu}) \\
&= \partial^{\mu}\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^{\mu}\boldsymbol{W}^{\nu}))\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\partial^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu} \\
&\quad +\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu}-g^{2}(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\boldsymbol{W}_{\nu} \qquad (8.131)
\end{aligned}
$$

2 階微分の第 1 行は ∂^{μ}，第 2 行は $\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})$ を行った結果である．太文字はアイソスピン空間のベクトルを表している．まったく同様に

$$
\begin{aligned}
D^{\nu}D^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu} &= (\partial^{\nu}+\mathrm{i}g\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})(\partial^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})\boldsymbol{W}_{\nu}) \\
&= \partial^{\nu}\partial^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\mu}))\boldsymbol{W}_{\nu}+\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})\partial^{\nu}\boldsymbol{W}_{\nu} \\
&\quad +\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})\partial^{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}-g^{2}(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})\boldsymbol{W}_{\nu} \qquad (8.132)
\end{aligned}
$$

である．

2 つの式の差をとるとき，打ち消すのは式(8.131) と式(8.132) の第 1 項同士，式(8.131) の第 3 項と式(8.132) の第 4 項のみである．

$$
(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu})(\mathbf{t}^{(1)}\cdot\boldsymbol{W}^{\nu})=\mathbf{t}_{a}^{(1)}\boldsymbol{W}_{a}^{\mu}\mathbf{t}_{b}^{(1)}\boldsymbol{W}_{b}^{\nu}
$$

と書いて擬標 a，b について和をとる．

$$
\begin{aligned}
(D^{\mu}D^{\nu}-D^{\nu}D^{\mu})\boldsymbol{W}_{\nu} &= \mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^{\mu}\boldsymbol{W}^{\nu}-\partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\mu}))\boldsymbol{W}_{\nu} \\
&\quad -g^{2}((t_{a}^{(1)}t_{b}^{(1)}-t_{b}^{(1)}t_{a}^{(1)})\boldsymbol{W}_{a}^{\mu}\boldsymbol{W}_{b}^{\nu})\cdot\boldsymbol{W}_{\nu} \qquad (8.133)
\end{aligned}
$$

式(8.134) および付録 D の式(D.39) より，式(8.133) の g^2 に比例する項は

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\varepsilon_{abc}t_{c}^{(1)}\boldsymbol{W}_{a}^{\mu}\boldsymbol{W}_{b}^{\nu} &= -\mathrm{i}\,\boldsymbol{W}^{\mu}\cdot(\boldsymbol{W}^{\nu}\times\mathbf{t}^{(1)}) \\
&= -\mathrm{i}\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\boldsymbol{W}^{\mu}\times\boldsymbol{W}^{\nu})
\end{aligned}
$$

となる．ここで 3 次元ベクトルの 3 重積の性質

$$
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})
$$

を用いた．したがって式(8.133) は式(8.135)

$$
(D^{\mu}D^{\nu}-D^{\nu}D^{\mu})\boldsymbol{W}_{\nu}=\mathrm{i}g(\mathbf{t}^{(1)}\cdot(\partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\nu}-\partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\mu}-g\boldsymbol{W}^{\mu}\times\boldsymbol{W}^{\nu}))\boldsymbol{W}_{\nu}
$$

になる．

8.6 図 8.4，8.5 に対応する振幅が式(8.140)の第 1 項，第 2 項になることは，本文および付録 F にまとめられた Feynman 規則から明らかであろう．クォークの伝播関数は $p_1{}^2=m^2$，$k_1{}^2=0$ より

$$
\frac{1}{\not{p}_1+\not{k}_1-m}=\frac{\not{p}_1+\not{k}_1+m}{(p_1+k_1)^2-m^2}
$$

$$(p_1+k_1)^2-m^2=p_1{}^2+2(p_1\cdot k_1)+k_1{}^2-m^2=2(p_1\cdot k_1)$$

と変形できる．$p_1+k_1=p_2+k_2$ より

$$\frac{1}{\not p_1+\not k_2-m}=\frac{1}{\not p_2+\not k_1-m}=\frac{\not p_2+\not k_1+m}{(p_2-k_1)^2-m^2}=\frac{\not p_2-\not k_1+m}{-2(p_2\cdot k_1)}$$

であるから

$$式(8.140)=(\mathrm{i}g)^2\mathrm{i}\bar{u}(p_2)\left[\frac{\tau_s}{2}\cdot\not\varepsilon_2\frac{\not p_1+\not k_1+m}{2(p_1\cdot k_1)}\not\varepsilon_1\cdot\frac{\tau_r}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{\tau_r}{2}\cdot\not\varepsilon_1\frac{\not p_2-\not k_1+m}{2(p_2\cdot k_1)}\not\varepsilon_2\cdot\frac{\tau_s}{2}\right]u(p_1)$$

ここで $\varepsilon_1\to k_1$ と置き換えると，第１項の分子は

$$((\not p_1+\not k_1)+m)\not k_1=(\not p_1+m)\not k_1=2(p_1\cdot k_1)-\not k_1(\not p_1-m)$$

となる．ただし式(D.6)およびその特別な形 $\not k_1\not k_1=k_1{}^2=0$ を用いた．同様に第２項の分子は

$$\not k_1[(\not p_2-\not k_1)+m]=\not k_1(\not p_2+m)=2(p_2\cdot k_1)-(\not p_2-m)\not k_1$$

となる．Dirac 方程式 $(\not p_1-m)u(p_1)=0$，$\bar{u}(p_2)(\not p_2-m)=0$ を用いて

$$式(8.140)=(-\mathrm{i}g)^2\mathrm{i}\bar{u}(p_2)\left[\frac{\tau_s}{2},\ \frac{\tau_r}{2}\right]\not\varepsilon_2 u(p_1)$$
$$=式(8.143)$$

が成り立つ．

8.7 式(8.149) の中の第１項を部分積分を用いて変形する．

$$\int \boldsymbol{W}_\mu^{s*}(2)\{\partial^\nu[t_{sr}^{(1)t}\boldsymbol{W}_\nu^t(3)\boldsymbol{W}^{r\mu}(1)\mathrm{d}^4x$$
$$=-\int\partial^\nu\boldsymbol{W}_\mu^{s*}(2)\cdot t_{sr}^{(1)t}\boldsymbol{W}_\nu^t(3)\cdot\boldsymbol{W}^{r\mu}(1)\mathrm{d}^4x$$

ここに μ，ν は時空間の指標，r，s，t は SU(2) 空間の指標である．時空間の波動関数を式(8.150)のようにとると $\partial^\nu\boldsymbol{W}_\mu\to-\mathrm{i}k^\nu\varepsilon_\mu$，$\partial^\nu\boldsymbol{W}_\mu^*\to\mathrm{i}k^\nu\varepsilon_\mu$ である．式(8.149) の被積分関数は SU(2) 空間の振幅 a を用いて

$$-(-\mathrm{i}k_2^\nu)\varepsilon_{2\mu}a_2^s\cdot t_{sr}^{(1)t}\varepsilon_{3\nu}a_3^t\cdot\varepsilon_1^\mu a_1^r$$
$$+\varepsilon_{2\mu}a_2^s\cdot t_{sr}^{(1)t}\cdot\varepsilon_3^\nu a_3^t\cdot(-\mathrm{i}k_{1\nu})\varepsilon_1^\mu a_1^r$$

となるが，式(8.152) より $t_{sr}^{(1)t}=\mathrm{i}\varepsilon_{rst}$ だから

$$-\varepsilon_{rst}a_1^r a_2^s a_3^t(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)(k_2\cdot\varepsilon_3)+\varepsilon_{rst}a_1^r a_2{}^s a_3{}^t(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)(k_1\cdot\varepsilon_3)$$
$$=\varepsilon_{rst}a_1^r a_2^s a_3^t(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)(k_1-k_2,\ \ \varepsilon_3)$$

である．式(8.149) の中の因子 $-\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}g)$ を補えばこれは式(8.151) である．

8.8 式(8.158)の中で $\varepsilon_1\to k_1$ の置き換えを行うが，本文に述べられているように $\boldsymbol{W}$ 粒子の質量は 0，定数 $\delta=1$ と仮定する．式(8.158)の中でまず SU(2) 指標を調べると

$$\varepsilon_{rst}\cdot\delta^{tt'}\cdot\frac{\tau^{t'}}{2}=\varepsilon_{rst}\cdot\frac{\tau^{t}}{2}$$

であるから，式(8.144) の中の SU(2) 指標と一致する．時空指標については

$$(k_1,\ \varepsilon_2)(\not{k}_1+\not{k}_2)+\not{\varepsilon}_2(k_1,\ -2k_2+k_1)+\not{k}_1(\varepsilon_2,\ k_2-2k_1)$$

である．ここで 4 次元スカラー積 $a\cdot b=(a,\ b)$ という記法を用いた．この式はさらに

$$(k_1,\ \varepsilon_2)(\not{k}_2-\not{k}_1)+(k_2,\ \varepsilon_2)\not{k}_1+(k_1,\ -2k_2+k_1)\not{\varepsilon}_2$$

と書かれるが，

$$\bar{u}(p_2)(\not{k}_2-\not{k}_1)u(p_1)=\bar{u}(p_2)(\not{p}_2-\not{p}_1)u(p_1)=0$$

$$(\varepsilon_2,\ k_2)=0 \qquad (\text{ゲージ条件})$$

$$(k_1,\ -2k_2+k_1)=(k_1-k_2+k_2,\ k_1-k_2-k_2)$$

$$=(k_1-k_3)^2-k_2^2=q^2 \qquad (\boldsymbol{W}\ \text{質量は}\ 0)$$

が成り立つから $\bar{u}(p_2)\not{\varepsilon}_2u(p_1)$ と簡単になる．したがって，式(8.158) に $\varepsilon_1\to k_1$ の置き換えを行った結果は

$$(-g)(-\mathrm{i})(-\mathrm{i}g)\cdot\bar{u}(p_2)\not{\varepsilon}_2\cdot\varepsilon_{rst}\frac{\tau^t}{2}u(p_1)$$

となり，式(8.144) の符号を変じたものになる．

8.9 場の量に局所的変換

$$\hat{\boldsymbol{W}}^{\mu}\to\hat{\boldsymbol{W}}'^{\mu}=\hat{\boldsymbol{W}}^{\mu}-\partial^{\mu}\hat{\boldsymbol{\eta}}-g(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^{\mu}) \tag{8.164}$$

を施したとき，場の演算子

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu}=\partial^{\mu}\hat{\boldsymbol{W}}^{\nu}-\partial^{\nu}\hat{\boldsymbol{W}}^{\mu}-g\hat{\boldsymbol{W}}^{\mu}\times\hat{\boldsymbol{W}}^{\nu} \tag{8.163}$$

はどう変換するか調べる．ただし $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ は小さいとしてその 1 次までの効果を算出すればよい．

変換(8.164) により場は

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu}\to\hat{\boldsymbol{F}}'^{\mu\nu}=\partial^{\mu}\hat{\boldsymbol{W}}'^{\nu}-\partial^{\nu}\hat{\boldsymbol{W}}'^{\mu}-g(\hat{\boldsymbol{W}}'^{\mu}\times\hat{\boldsymbol{W}}'^{\nu})$$

$$=\partial^{\mu}(\hat{\boldsymbol{W}}^{\nu}-\partial^{\nu}\hat{\boldsymbol{\eta}}-g\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^{\nu})$$

$$-\partial^\nu(\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}-g\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)$$
$$-g(\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}-g\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)\times(\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{\eta}}-g\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\boldsymbol{W}^\nu)$$

となり，それぞれ微分を実行すると

$$\text{第 1 項}=\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\mu\partial^\nu\hat{\boldsymbol{\eta}}-g(\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu+\hat{\boldsymbol{\eta}}\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu)$$
$$\text{第 2 項}=-[\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-\partial^\nu\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}-g(\partial^\nu\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu+\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)]$$
$$\text{第 3 項}=-g[\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times\partial^\nu\hat{\boldsymbol{\eta}}-g\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\boldsymbol{W}^\nu)$$
$$-\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-g(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu]$$

を得る．小さい演算子 $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ を含まない項は

$$\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-g\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times\boldsymbol{W}^\nu=\boldsymbol{F}^{\mu\nu},$$

$\boldsymbol{\eta}$ を含む項は定数 g を除いて

$$-\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu+\partial^\nu\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu+\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu+\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times\partial^\nu\hat{\boldsymbol{\eta}}$$
$$+g\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu)+\partial^\mu\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu+g(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu$$
$$=-\hat{\boldsymbol{\eta}}\times(\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)+g[\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu)+(\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu]$$

となる．

$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ を任意のベクトルとするとき恒等式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$$

より

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$
$$=\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$$

が成り立つ．上の式の g を含む項にこの関係を用いて

$$-\hat{\boldsymbol{\eta}}\times(\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu)+g\hat{\boldsymbol{\eta}}\times(\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu)$$
$$=-\hat{\boldsymbol{\eta}}\times(\partial^\mu\hat{\boldsymbol{W}}^\nu-\partial^\nu\hat{\boldsymbol{W}}^\mu-\hat{\boldsymbol{W}}^\mu\times\hat{\boldsymbol{W}}^\nu)=-\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$$

となる．

$$\therefore\quad \hat{\boldsymbol{F}}'^{\mu\nu}=\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu}-g\hat{\boldsymbol{\eta}}\times\hat{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu}$$

《9 章》

9.1　式(9.7) の変換は式(9.11) の類推から

$$\psi\to\psi'=e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{T})}\psi$$

と書ける．$\boldsymbol{s}$ は 3 次元 SU(2) 空間（カラー空間）の“回転角”の成分を表すベクトル，$\boldsymbol{T}$ は回転の生成演算子である．パラメーター $\boldsymbol{s}$ の各成分 s_i $(i=1,\ 2,$

3) は小さいとして展開すれば

$$e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{T})}=1+\mathrm{i}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{T})=1+\mathrm{i}\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{T}_i$$

となり，式(9.7) のように成分で書けば

$$\psi^{\alpha\prime}=(1+\mathrm{i}\boldsymbol{s}_i\cdot T_i)^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta}=\mathrm{Q}^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta} \qquad (\mathrm{i}\text{ について和})$$

である．いま式(9.2) で定義されるカラー反対称な 3q 系にこのカラー変換を行えば

$$\begin{aligned}\psi_{3q}\to\psi'_{3q}&=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(1+\mathrm{i}s_i\cdot T_i)^{\alpha}_{\lambda}(1+\mathrm{i}s_i\cdot T_i)^{\beta}_{\mu}(1+\mathrm{i}s_i\cdot T_i)^{\gamma}_{\nu}\psi^{\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu}\\&=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[\delta^{\alpha}_{\lambda}+\mathrm{i}s_i(T_i)^{\alpha}_{\lambda}][\delta^{\beta}_{\mu}+\mathrm{i}s_i(T_i)^{\beta}_{\mu}]\\&\quad\times[\delta^{\gamma}_{\nu}+\mathrm{i}s_i(T_i)^{\gamma}_{\nu}]\psi^{\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu}\\&=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\nu}+\mathrm{i}s_i(T_i)^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\nu}+\mathrm{i}s_i(T_i)^{\beta}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\nu}\\&\quad+\mathrm{i}s_i(T_i)^{\gamma}_{\nu}\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}]\psi^{\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu}\end{aligned}$$

ただし s_i は小さいとしてその 1 次までをとる．SU(2) 群の $T=1$ 表現となる 3 行 3 列の行列 T_i は式(8.38) に与えられている．

$$(T_i)_{jk}=-\mathrm{i}\varepsilon_{ijk} \tag{8.38}$$

この表式を用いて T_i の行列要素を含む項の α, β, γ に関する和を行う．カラー空間は Euclid 的だから指標の上下を区別する必要はない．

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(T_i)^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\nu}=-\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{i\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}=\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\mu\nu}\varepsilon_{\alpha i\lambda}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ の 2 つの積を指標について足し合わせるときの演算は問題 10.3 に解説されている．その結果を用いて

$$\varepsilon_{\alpha\mu\nu}\varepsilon_{\alpha i\lambda}=\delta_{\mu i}\delta_{\nu\lambda}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu i}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathrm{i}s_i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(T_i)^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\nu}&=-s_i(\delta_{\mu i}\delta_{\nu\lambda}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu i})\\&=-s_{\mu}\delta_{\nu\lambda}+s_{\nu}\delta_{\mu\lambda}\end{aligned}$$

となる．

同様な計算をくりかえせば

$$\mathrm{i}s_i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(T_i)^{\beta}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\nu}=s_{\lambda}\delta_{\nu\mu}-s_{\nu}\delta_{\lambda\mu}$$

$$\mathrm{i}s_i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(T_i)^{\gamma}_{\nu}\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}=-s_{\lambda}\delta_{\mu\nu}+s_{\mu}\delta_{\lambda\nu}$$

を得るから，s の成分を 1 次で含む項の総和は 0 である．

$$\therefore\quad \psi_{3q}'=\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\psi^{\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu}=\psi_{3q}$$

9.2 式(9.41)

$$\alpha_s(Q^2)=\alpha_s(\mu^2)\left[1+\left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}\right)\cdot(33-2f)\cdot\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)\right]^{-1} \tag{9.41}$$

を

$$\ln\Lambda^2=\ln\mu^2-\frac{12\pi}{(33-2f)\alpha_s(\mu^2)}$$

を用いて書き直す．その式より

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)=\frac{-12\pi}{(33-2f)\alpha_s(\mu^2)}$$

であり，また

$$\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)=\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\cdot\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)=\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)+\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)$$

であるから式(9.41) は

$$\begin{aligned}\alpha_s(Q^2)&=\alpha_s(\mu^2)\left\{1+\frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}\cdot(33-2f)\cdot\left[\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)-\frac{12\pi}{(33-2f)\alpha_s(\mu^2)}\right]\right\}^{-1}\\&=\alpha_s(\mu^2)\cdot\left[1+\frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}\cdot(33-2f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)-1\right]^{-1}\\&=\frac{12\pi}{(33-2f)\ln(Q^2/\Lambda^2)}\end{aligned}$$

となる．これが式(9.42) である．

9.3 （i） $\chi(c_2)$ (c_2=r, b, g) はこの問題に与えられている 3 行 1 列の列ベクトル，$\chi^\dagger(c_2)$ はその転置行列として得られる 3 列 1 行の行ベクトルである．

$$\begin{aligned}\sum_{c_2=\mathrm{r,b,g}}\chi(c_2)\cdot\chi^\dagger(c_2)&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1\quad 0\quad 0)+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(0\quad 1\quad 0)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(0\quad 0\quad 1)\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I^{(3)}\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{c_2}\chi_s(c_2)\cdot\chi_l^\dagger(c_2)=(\sum_{c_2}\chi(c_2)\cdot\chi^\dagger(c_2))_{sl}=(I^{(3)})_{sl}=\delta_{sl}$$

を得る．$I^{(3)}$ は 3 行 3 列の単位行列を表す．

(ii)
$$\sum_{c_1,c_2,c_3}a^\alpha(c_3)\chi_r^\dagger(c_1)\cdot\frac{\lambda_{rs}^\alpha}{2}\chi_s(c_2)\chi_l^\dagger(c_2)\cdot\frac{\lambda_{lm}^\beta}{2}\chi_m(c_1)a^{*\beta}(c_3) \tag{b}$$

の中で χ, $\chi^\dagger$ はその成分で表されているから c_1, c_2 に関する和はただちに実行できて

$$\sum_{c_2}\chi_s(c_2)\chi_l^\dagger(c_2)=\delta_{sl}$$

$$\sum_{c_1}\chi_r^\dagger(c_1)\chi_m(c_1)=\sum_{c_1}\chi_m(c_1)\chi_r^\dagger(c_1)=\delta_{mr}=\delta_{rm}$$

である．c_3 の和の前に r, s の和を行えば

$$\sum_{c_3}a^\alpha(c_3)\cdot\delta_{rm}\cdot\frac{\lambda_{rs}^\alpha}{2}\cdot\delta_{sl}\cdot\frac{\lambda_{lm}^\beta}{2}\cdot a^{*\beta}(c_3)$$

$$=\sum_{c_3}a^\alpha(c_3)\cdot\frac{\lambda_{ml}^\alpha}{2}\cdot\frac{\lambda_{lm}^\beta}{2}\cdot a^{*\beta}(c_3)$$

$$=\frac{\lambda_{ml}^\alpha}{2}\cdot\frac{\lambda_{lm}^\beta}{2}=\frac{1}{4}\sum_\alpha\sum_m(\lambda^\alpha)^2_{mm}=\frac{1}{4}\sum_\alpha\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha)^2$$

最後の式では加え合わすべき指標を明示してある．

(iii) 付録 F には λ^α の行列が与えられているので，その 2 乗の対角和は容易に求められ，すべての α について 2 である．例えば

$$(\lambda^1)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(\lambda^5)^2=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(\lambda^8)^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\sum_{\alpha=1}^{8}\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha)^2=8\times2=16$$

(iv)　入射するクォークのカラーの自由度の数 3 で平均を行い，$\frac{1}{3}\sum_{a=1}^{8}\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\lambda^a)^2$ $=1/3\times 4=4/3$ である．

9.4　カラー自由度の和は問題 9.3 で行ってあるので，カラー波動関数を省略して振幅を

$$F=\frac{e_a e^2 g_s}{Q^2}\bar{v}(k_2)\gamma^\mu\cdot u(k_1)\left[\bar{u}(p_1)\gamma_\nu\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\gamma_\mu v(p_2)\right.$$
$$\left.-\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\lambda v(p_2)\right]\varepsilon^{*\lambda} \tag{9.56}$$

と書く．この複素共役量は

$$F^*=\frac{e_a e^2 g_s}{Q^2}\bar{u}(k_1)\gamma^\nu\cdot v(k_2)\left[\bar{v}(p_2)\gamma_u\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\gamma_\rho u(p_1)\right.$$
$$\left.-\bar{v}(p_2)\gamma_\rho\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\nu u(p_1)\right]\varepsilon^\rho$$

である．$|F|^2$ を作り電子・クォーク・グルーオンのスピン自由度について和をとる．入射 e^-e^+ 状態のスピン多重度について平均をとれば

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}|F|^2=\frac{e^4 e_a^2 g_s^2}{8Q^4}\cdot L^{\mu\nu}(k_1,\ k_2)H_{\mu\nu}(p_1,\ p_2,\ p_3) \tag{9.57}$$

の形をとる．レプトン・テンソル $L^{\mu\nu}(k_1,\ k_2)$ とハドロン・テンソルは別々に分離できる．

$$L^{\mu\nu}(k_1,\ k_2)=\sum_{\text{spin}}\bar{v}(k_2)\gamma^\nu u(k_1)\bar{u}(k_1)\gamma^\nu v(k_2)$$

$$H_{\mu\nu}(p_1,\ p_2,\ p_3)=\sum_{\text{spin}}\left[\bar{u}(p_1)\gamma_\lambda\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\cdot\gamma_\mu v(p_2)\right.$$
$$\left.-\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\lambda v(p_2)\right]$$
$$\times\left[\bar{v}(p_2)\gamma_\nu\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\cdot\gamma_\rho u(p_1)\right.$$
$$\left.-\bar{v}(p_2)\gamma_\rho\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\nu u(p_1)\right]\varepsilon^{*\lambda}\varepsilon^\rho$$

で与えられる．いくつかの段階にわけて $L^{\mu\nu}(k_1,\ k_2)$ と $H_{\mu\nu}(p_1,\ p_2,\ p_3)$ を計算する．

1)　レプトン・テンソル

$$\sum_{\text{spin}} \bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)\bar{u}(k_1)\gamma^\nu v(k_2) = \mathrm{Tr}[\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{k}_2]$$

対角和の計算に必要な公式は付録 D にまとめてある．ここに

$$\gamma^\nu \not{k}_2 = \gamma^\nu \gamma^\alpha (k_2)_\alpha = (2g^{\nu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\nu)(k_2)_\alpha$$
$$= 2(k_2)^\nu - \not{k}_2 \gamma^\nu$$
$$\not{k}_1 \not{k}_2 = (k_1 \cdot k_2) - \not{k}_2 \not{k}_1$$

を用いて

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{k}_2] = \mathrm{Tr}[\gamma^\mu \not{k}_1 (2k_2^\nu - \not{k}_2 \gamma^\nu)]$$
$$= 2k_2^\nu \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k}_1) - \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k}_1 \not{k}_2 \gamma^\nu)$$
$$= 2k_2^\nu \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k}_1) - 2(k_1 \cdot k_2)\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k}_2 \not{k}_1 \gamma^\nu)$$
$$= 2k_2^\nu \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k}_1) - 2(k_1 \cdot k_2)\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + 2k_2^\mu \mathrm{Tr}(\not{k}_1 \gamma^\nu) - \mathrm{Tr}(\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu)$$
$$= 2k_2^\nu \cdot 4k_1^\mu - 2(k_1 \cdot k_2) \cdot 4g^{\mu\nu} + 2k_2^\mu \cdot 4k_1^\nu - \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{k}_2)$$

この最後の項は左辺と同じである．

$$\therefore \quad \mathrm{Tr}[\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{k}_2] = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu}]$$

2)　ハドロン・テンソルのうちグルーオンのスピン和を行えば式(5.168) より

$$\sum_{\text{spin}} \varepsilon^{*\lambda} \varepsilon^\rho = -g^{\lambda\rho}$$

である．

3)　クォークのスピン和 4 項のうちまず第 1 項同士の積を考える．

$$S_1 \equiv \sum_{\text{spin}} \bar{u}(p_1)\gamma_\lambda \cdot \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3}{2p_1 \cdot p_3} \gamma_\mu v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\nu \cdot \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3}{2p_1 \cdot p_3} \gamma_\rho u(p_1) \cdot (-g^{\lambda\rho})$$
$$= \frac{-1}{4(p_1 \cdot p_3)^2} \mathrm{Tr}[\gamma_\lambda (\not{p}_1 + \not{p}_3) \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu (\not{p}_1 + \not{p}_3) \gamma_\rho \not{p}_1 g^{\lambda\rho}]$$

付録の式(D.2) より

$$\gamma_\rho \not{p}_1 \gamma_\lambda g^{\lambda\rho} = \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma^\rho = -2\not{p}_1$$
$$S_1 = \frac{-1 \cdot -2}{4(p_1 \cdot p_3)^2} \cdot \mathrm{Tr}[(\not{p}_1 + \not{p}_3)\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu (\not{p}_1 + \not{p}_3)\not{p}_1]$$

$\not{p}_1^2 = \not{p}_2^2 = \not{p}_3^2 = 0$ に注意して書き直すと

$$\mathrm{Tr}[\qquad] = \mathrm{Tr}[\not{p}_1 \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_3] = 2(p_1 \cdot p_3)\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_3]$$
$$= 2(p_1 \cdot p_3) \cdot 4L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3)$$

ただし $L_{\mu\nu}$ は式(9.58) で定義されたテンソルである．

$$\therefore \quad S_1=\frac{-1\cdot -2\cdot 2\cdot 4}{4(p_1\cdot p_3)^2}\cdot(p_1\cdot p_3)L_{\mu\nu}(p_2,\ \ p_3)=-4\cdot\frac{L_{\mu\nu}(p_2,\ \ p_3)}{(p_1\cdot p_3)}$$

4)　クォークのスピン和を第２項同士の積について行う．

$$S_2\equiv\sum_{\text{spin}}\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\cdot\frac{\not p_2+\not p_3}{2p_2\cdot p_3}\gamma_\lambda v(p_2)\,\bar{v}(p_2)\gamma_\rho\cdot\frac{\not p_2+\not p_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\nu u(p_1)\cdot(-g^{\lambda\rho})$$

$$=\frac{-1}{4(p_2\cdot p_3)^2}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not p_2+\not p_3)\gamma_\lambda\not p_2\gamma_\rho(\not p_2+\not p_3)\gamma_\nu\not p_1 g^{\lambda\rho}]$$

式(D.2) より

$$\gamma_\lambda\not p_2\gamma_\rho g^{\lambda\rho}=\gamma_\lambda\not p_2\gamma^\lambda=-2\not p_2$$

$$S_2=\frac{-1\cdot -2}{4(p_2\cdot p_3)^2}\cdot\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not p_2+\not p_3)\not p_2(\not p_2+\not p_3)\gamma_\nu\not p_1]$$

$$\mathrm{Tr}[\qquad]=\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not p_3\not p_2\not p_3\gamma_\nu\not p_1]=\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(2(p_3\cdot p_2)-\not p_2\not p_3)\not p_3\gamma_\nu\not p_1]$$

$$=2(p_3\cdot p_2)\mathrm{Tr}[\gamma_\mu p_3\gamma_\nu p_1]$$

$$=2(p_3\cdot p_2)\cdot 4L_{\mu\nu}(p_3\cdot p_1)$$

$$\therefore \quad S_2=\frac{-1\cdot -2\cdot 2\cdot 4}{4(p_2\cdot p_3)^2}\cdot(p_2\cdot p_3)\cdot L_{\mu\nu}(p_3,\ \ p_1)=4\cdot\frac{L_{\mu\nu}(p_3,\ \ p_1)}{(p_2\cdot p_3)}$$

5)　交差項（第１項と第２項の積）についてクォークのスピン和を行う．

$$-S_3=\sum_{\text{spin}}\bar{u}(p_1)\gamma_\lambda\cdot\frac{\not p_1+\not p_3}{2p_1\cdot p_3}\cdot\gamma_\mu v(p_2)\,\bar{v}(p_2)\gamma_\rho\cdot\frac{\not p_2+\not p_3}{2p_2\cdot p_3}\gamma_\nu u(p_1)\cdot(-g^{\lambda\rho})$$

$$=\frac{-1}{4(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}\cdot\mathrm{Tr}[\gamma_\lambda(\not p_1+\not p_3)\gamma_\mu\not p_2\gamma_\rho(\not p_2+\not p_3)\gamma_\nu\not p_1 g^{\lambda\rho}]$$

式(D.4) より

$$\gamma_\rho(\not p_2+\not p_3)\gamma_\nu\not p_1\gamma_\lambda g^{\lambda\rho}=\gamma_\rho(\not p_2+\not p_3)\gamma_\nu\not p_1\gamma^\rho=-2\not p_1\gamma_\nu(\not p_2+\not p_3)$$

である．これは ν 成分のみ１でその他の成分が０であるような4-ベクトル n を用いて $\gamma_\nu=n^\alpha\gamma_\alpha=\not n$ と書けるからである．

$$\mathrm{Tr}[\qquad]=-2\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not p_2\not p_1+\not p_3\not p_1+\not p_2\not p_3)\gamma^\nu\not p_2\not p_1$$

同様に交差項のもうひとつは

$$-S_4=\sum_{\text{spin}}\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\cdot\frac{\not p_2+\not p_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\lambda v(p_2)\,\bar{v}(p_2)\gamma_\nu\cdot\frac{\not p_1+\not p_3}{2p_1\cdot p_3}\gamma_\rho v(p_1)\cdot(-g^{\lambda\rho})$$

$$=\frac{-1}{4(p_2\cdot p_3)(p_1\cdot p_3)}\cdot\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not p_2+\not p_3)\gamma_\lambda\not p_2\gamma_\nu(\not p_1+\not p_3)\gamma_\rho\not p_1 g^{\lambda\rho}]$$

$$=\frac{-1\cdot -2}{4(p_2\cdot p_3)(p_1\cdot p_3)}\cdot\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not p_2\not p_1+\not p_3\not p_1+\not p_2\not p_3)\gamma_\nu\not p_2\not p_1]$$

これらの対角和は，4 次元的長さが 0 の運動量 a，b，c $(a^2=b^2=c^2=0)$ から作られる次の 3 種のタイプに帰着できる．

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma_\nu \not{a}\not{b}],\quad \mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma_\nu \not{c}\not{b}],\quad \mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma_\nu \not{a}\not{c}]$$

6)　これらの対角和を求める補助手段として，次の恒等式を導いておく．

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}]=4[(b\cdot c)a_\mu-(c\cdot a)b_\mu+(a\cdot b)c_\mu]$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma_\nu]=4[2a_\mu b_\nu-L_{\mu\nu}(a,\ b)]$$

第 1 の恒等式は，交換関係を用いて $\not{c}$ をひとつずつ前の方へ送ってゆき，$\mathrm{Tr}[\not{c}\gamma_\mu\not{a}\not{b}]$ を得るとこれはもとの対角和と同じであることに注意すればよく，第 2 の恒等式は $\not{b}\gamma_\nu=2b_\nu-\gamma_\nu\not{b}$ からただちに得られる．

求める対角和は，$\not{a}^2=\not{b}^2=\not{c}^2=0$ の関係式が使えるように，交換関係を用いて $\not{a}$，$\not{b}$，$\not{c}$ を移動すればよい．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma_\nu \not{a}\not{b}]&=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma_\nu]-2b_\nu\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{a}]\\
&=-2\cdot 4(a\cdot b)L_{\mu\nu}(a,\ b)\\
\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma_\nu \not{c}\not{b}]&=2(b\cdot c)\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma_\nu]-2b_\nu\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}]\\
&=2\cdot 4[-(b\cdot c)L_{\mu\nu}(a,\ b)+(a\cdot c)b_\mu b_\nu-(a\cdot b)c_\mu b_\nu]\\
\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma_\nu \not{a}\not{c}]&=2a_\nu\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}]-2(a\cdot b)\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{a}\gamma_\nu\not{c}]\\
&=2\cdot 4[(b\cdot c)a_\mu a_\nu-(c\cdot a)b_\mu a_\nu+(a\cdot b)(c_\mu a_\nu-L_{\mu\nu}(a,\ c))]
\end{aligned}$$

7)　S_3, S_4 の和から共通因子 $\dfrac{-2\cdot 2\cdot 4}{4(p_2\cdot p_3)(p_3\cdot p_1)}$ を除いた残りをまとめると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&-(p_1\cdot p_2)L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)\\
&+(p_2,\ p_1)[(p_3)_\mu(p_2)_\nu-L_{\mu\nu}(p_3,\ p_2)]+(p_3\cdot p_1)(p_2)_\mu(p_2)_\nu-(p_2\cdot p_3)(p_1)_\mu(p_2)_\nu\\
&+(p_2\cdot p_3)(p_1)_\mu(p_1)_\nu-(p_1\cdot p_2)(p_3)_\mu(p_1)_\nu+(p_3\cdot p_1)[(p_2)_\mu(p_1)_\nu-L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)]\\
&-(p_1\cdot p_2)L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)\\
&+(p_1\cdot p_2)[(p_3)_\mu(p_1)_\nu-L_{\mu\nu}(p_3,\ p_1)]+(p_2\cdot p_3)(p_1)_\mu(p_1)_\nu-(p_3\cdot p_1)(p_2)_\mu(p_1)_\nu\\
=&-(p_1\cdot p_2)[2L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)+L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3)+L_{\mu\nu}(p_3,\ p_1)]\\
&+(p_2\cdot p_3)[L_{\mu\nu}(p_1,\ p_1)-L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)]\\
&+(p_3\cdot p_1)[L_{\mu\nu}(p_2,\ p_2)-L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)]
\end{aligned}$$

もちろん $L_{\mu\nu}(p',\ p)=L_{\mu\nu}(p,\ p')$ である．

8)　純 2 乗項 S_1，S_2 と交差項を足せば式(9.59)を得る．共通因子 4 を除いて

$$
\begin{aligned}
\sum S_i = & \frac{1}{(p_3 \cdot p_1)} \cdot L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3) + \frac{1}{(p_2 \cdot p_3)} \cdot L_{\mu\nu}(p_3,\ p_1) \\
& + \frac{(p_1 \cdot p_2)}{(p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)} \cdot [2L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2) + L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3) + L_{\mu\nu}(p_3,\ p_1)] \\
& - \frac{(p_2 \cdot p_3)}{(p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)} \cdot [L_{\mu\nu}(p_1,\ p_1) - L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)] \\
& - \frac{(p_3 \cdot p_1)}{(p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)} \cdot [L_{\mu\nu}(p_2,\ p_2) - L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)] \\
= & \frac{1}{p_3 \cdot p_1} \cdot [L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3) - L_{\mu\nu}(p_1,\ p_1) + L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)] \\
& + \frac{1}{p_2 \cdot p_3} \cdot [L_{\mu\nu}(p_3,\ p_1) - L_{\mu\nu}(p_2,\ p_2) + L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2)] \\
& + \left. \frac{(p_1 \cdot p_2)}{(p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)} \right\} \cdot [2L_{\mu\nu}(p_1,\ p_2) + L_{\mu\nu}(p_2,\ p_3) + L_{\mu\nu}(p_3,\ p_1)]
\end{aligned}
$$

である．

9.5 式(9.60) または式(9.61) で定義された s_{ij} は相対論的不変量である．これを粒子 2 と粒子 3 の重心系で計算するが，粒子はすべて質量を持たないと仮定されているので，p_iをこの座標系における 4 元ベクトル p_i の 3 次元的な長さを表すとしても混乱を生じない．このとき定義により $p_2 = p_3$ である．図 9.25 を参照し，4 次元スカラー積は・で表せば

$$
\begin{aligned}
s_{12} &= 2p_1 \cdot p_2 = 2p_1 p_2 (1 + \cos\tilde{\theta}) \\
s_{23} &= 2p_2 \cdot p_3 = 2p_2 p_3 (1 - \cos\pi) = 4p_2^2 \\
s_{31} &= 2p_3 \cdot p_1 = 2p_1 p_2 (1 - \cos\tilde{\theta})
\end{aligned}
$$

である．式(9.62) より

$$Q^2 = s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 = 4p_1 p_2 + 4p_2^2$$

無次元変数 x_i は式(9.67) で定義されている．

$$x_i = 1 - \frac{s_{jk}}{Q^2} \quad (i,\ j,\ k \text{ について巡環})$$

$$\therefore \quad x_1 = 1 - \frac{s_{23}}{Q^2} = 1 - \frac{4p_2^2}{Q^2} = \frac{Q^2 - 4p_2^2}{Q^2} = \frac{4p_1 p_2}{Q^2}$$

$$x_2 = 1 - \frac{s_{31}}{Q^2} = 1 - \frac{2p_1 p_2}{Q^2} \cdot (1 - \cos\tilde{\theta}) = 1 - \frac{x_1}{2}(1 - \cos\tilde{\theta})$$

$$=\left(1-\frac{x_1}{2}\right)+\frac{x_1}{2}\cos\tilde{\theta}$$

$$x_3=1-\frac{s_{12}}{Q^2}=1-\frac{2p_1p_2}{Q^2}=(1+\cos\tilde{\theta})=1-\frac{x_1}{2}(1+\cos\tilde{\theta})$$

$$=\left(1-\frac{x_1}{2}\right)-\frac{x_1}{2}\cos\tilde{\theta}$$

これらは式(9.69) である．

9.6 式(9.65)

$$\frac{s_{13}}{s_{23}}+\frac{s_{23}}{s_{13}}+\frac{2Q^2s_{12}}{s_{13}s_{23}}- \tag{9.65}$$

を式(9.67) で定義された x_i ($i=1, 2, 3$)

$$s_{23}=Q^2(1-x_1),\quad s_{31}=s_{13}=Q^2(1-x_2),\quad s_{12}=Q^2(1-x_3)$$

を用いて書き直す．式(9.65) は

$$\frac{1-x_2}{1-x_1}+\frac{1-x_1}{1-x_2}+\frac{2(1-x_3)}{(1-x_2)(1-x_1)}\equiv\frac{P}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

多項式 P は式(9.68)

$$x_1+x_2+x_3=2 \tag{9.68}$$

を用いて

$$P=(1-x_2)^2+(1-x_1)^2-2(1+x_1+x_2)$$
$$=x_1^2+x_2^2$$

となり，式(9.70) の中の因子と一致する．

9.7 スカラー・グルーオンとクォークとの結合は，クォーク波動関数の作るスカラー共変量とグルーオンの波動関数の積 $g_s\bar{\psi}\psi\cdot\phi$ で与えられると考える．ベクトル・グルーオンの振幅式(9.56) に対応してスカラー・グルーオンでは

$$F=\frac{e_a e g_s}{Q^2}\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)\cdot\left(\bar{u}(p_1)\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\cdot\gamma_\mu v(p_2)\right.$$
$$\left.-\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot v(p_2)\right)$$

と書ける．第 2 項の符号が負であるのは，反クォークの“強い荷量”が $-g_s$ となるからである．これは反電子の電磁結合の強さが，電子の電磁結合と大きさ等しく符号反対になることと対応する．ここでカラー自由度は独立な自由度として省略してある．

問題9.4とまったく平行に，電子とグルーオンのスピンに関する和と平均を行うことができる．レプトン・テンソルは再び式(9.58) で与えられる．自明な定数を別にして

$$H_{\mu\nu}(p_1,\ p_2,\ p_3)=\sum_{\text{spin}}\left[\bar{u}(p_1)\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\gamma_\mu v(p_2)-\bar{u}(p_1)\cdot\gamma_\mu\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}v(p_2)\right]$$
$$\times\left[\bar{v}(p_2)\gamma_\nu\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}u(p_1)-\bar{v}(p_2)\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot\gamma_\nu u(p_1)\right]$$

であるが，断面積を求めるには式(9.65)と同じように $-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}H_{\mu\nu}$ を求めれば足りる．

まず純2乗になる項を計算する．

$$\sum_{\text{spin}}g^{\mu\nu}\cdot\bar{u}(p_1)\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\cdot\gamma_\mu v(p_2)\,\bar{v}(p_2)\gamma_\nu\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}u(p_1)$$
$$=\frac{1}{4(p_1\cdot p_3)^2}\mathrm{Tr}[g^{\mu\nu}\cdot(\not{p}_1+\not{p}_3)\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu\cdot(\not{p}_1+\not{p}_3)\not{p}_1]$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\qquad]&=(-2)\mathrm{Tr}[(\not{p}_1+\not{p}_3)\not{p}_2(\not{p}_1+\not{p}_3)\not{p}_1]\\&=(-2)\mathrm{Tr}[\not{p}_1\not{p}_3\not{p}_2\not{p}_3]\\&=(-2)\cdot2(p_2\cdot p_3)\cdot4(p_1\cdot p_3)\end{aligned}$$

$$\sum_{\text{spin}}g^{\mu\nu}\cdot\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\cdot v(p_2)\cdot\bar{v}(p_2)\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\gamma_\nu u(p_1)$$
$$=\frac{1}{4(p_2\cdot p_3)^2}\mathrm{Tr}[g^{\mu\nu}\gamma_\mu(\not{p}_2+\not{p}_3)\not{p}_2(\not{p}_2+\not{p}_3)\gamma_\nu\not{p}_1]$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\qquad]&=(-2)\mathrm{Tr}[(\not{p}_2+\not{p}_3)\not{p}_2(\not{p}_2+\not{p}_3)\not{p}_1]\\&=(-2)\mathrm{Tr}[\not{p}_3\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_1]\\&=(-2)\cdot2(p_2\cdot p_3)\cdot4(p_1\cdot p_3)\end{aligned}$$

ついで交差項を計算する．式(D.4) を用いて

$$-\sum_{\text{spin}}g^{\mu\nu}\cdot\bar{u}(p_1)\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}\cdot\gamma_\mu v(p_2)\,\bar{v}(p_2)\cdot\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}\gamma_\nu u(p_1)$$
$$=\frac{-1}{4(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}\mathrm{Tr}[(\not{p}_1+\not{p}_3)\gamma_\mu\not{p}_2(\not{p}_2+\not{p}_3)\gamma^\mu\not{p}_1]$$

$$=\frac{-1\cdot 4(p_2\cdot p_3)}{4(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}\cdot 4(p_3\cdot p_1)$$

$$-\sum_{\text{spin}} g^{\mu\nu}\bar{u}(p_1)\gamma_\mu\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2p_2\cdot p_3}v(p_2)\cdot\bar{v}(p_2)\gamma_\nu\cdot\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2p_1\cdot p_3}u(p_1)$$

$$=\frac{-1}{4(p_2\cdot p_3)(p_1\cdot p_3)}\cdot\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2+\not{p}_3)\not{p}_2\gamma^\mu(\not{p}_1+\not{p}_3)\not{p}_1]$$

$$=\frac{-1\cdot 4(p_2\cdot p_3)}{4(p_2\cdot p_3)(p_1\cdot p_3)}\cdot 4(p_3\cdot p_1)$$

となる．したがってその和として式(9.73) を得る．

$$-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}H_{\mu\nu}=\frac{(p_2\cdot p_3)(p_1\cdot p_3)}{(p_1\cdot p_3)^2}+\frac{(p_2\cdot p_3)(p_1\cdot p_3)}{(p_2\cdot p_3)^2}+\frac{2(p_2\cdot p_3)(p_3\cdot p_1)}{(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}$$

$$=\frac{p_2\cdot p_3}{p_3\cdot p_1}+\frac{p_3\cdot p_1}{p_2\cdot p_3}+2$$

式(9.61)，(9.67) によって変数 x_i に直すと上式は

$$\frac{s_{23}}{s_{31}}+\frac{s_{31}}{s_{23}}+2=\frac{1-x_1}{1-x_2}+\frac{1-x_2}{1-x_1}+2=\frac{P}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$P=(1-x_1)^2+(1-x_2)^2+2(1-x_1)(1-x_2)$$

$$=(1-x_1+1-x_2)^2=(2-x_1-x_2)^2=x_3^2$$

となる．ここで式(9.68) を用いた．

9.8 ベクトル・グルーオンに対して相対論的不変な 2 重断面積は式(9.70) で与えられる．

$$\frac{1}{\sigma_{\text{pt}}}\cdot\frac{3\pi}{2\alpha_s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \tag{9.70}$$

いま変数 x_1 を固定して左辺の断面積を考えれば式(9.69) より

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}\rightarrow\frac{2}{x_1}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\tilde{\theta}}$$

である．右辺を 3 つの変数 x_1，x_2，x_3 について対称化すれば（循環的に変じて加える）

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}+\frac{x_2^2+x_3^2}{(1-x_2)(1-x_3)}+\frac{x_3^2+x_1^2}{(1-x_3)(1-x_1)}\equiv V$$

式(9.69) より

$$1-x_2=\frac{x_1}{2}(1-\cos\tilde{\theta}),\ 1-x_3=\frac{x_1}{2}(1+\cos\tilde{\theta}) \tag{9.69}$$

を得てこれを V の分母に代入すれば

$$V=\frac{1}{1-\cos^2\tilde{\theta}}\cdot\frac{2}{x_1(1-x_1)}\cdot\{2(1-x_1)(x_2^2+x_3^2)$$
$$+x_1[(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_2^2-x_3^2)\cos\tilde{\theta}]\}$$

である．同じく式(9.69) より

$$x_2+x_3=2-x_1,\quad x_2-x_3=x_1\cos\tilde{\theta}$$

だから

$$x_2^2+x_3^2=\frac{1}{2}[(x_2+x_3)^2+(x_2-x_3)^2]=\frac{1}{2}[(2-x_1)^2+x_1^2\cos^2\tilde{\theta}],$$

$$x_2^2-x_3^2=(x_2+x_3)(x_2-x_3)=x_1(2-x_1)\cos\tilde{\theta}$$

$$\therefore\quad \{\cdots\cdots\cdots\}=2x_1^3+(2-x_1)(x_2^2+x_3^2)+x_1(x_2^2-x_3^2)\cos\tilde{\theta}$$

$$=2x_1^3+\frac{1}{2}(2-x_1)^3+\frac{3}{2}x_1^2(2-x_1)\cos^2\tilde{\theta}$$

$$=\left[2x_1^3+\frac{1}{2}\cdot(2-x_1)^3\right]\left[1+\frac{3x_1^2(2-x_1)\cos^2\tilde{\theta}}{4x_1^3+(2-x_1)^3}\right]$$

したがって $\cos\tilde{\theta}=0$ で 1 になるように断面積を規格化すれば

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\tilde{\theta}}=\frac{1+\dfrac{3(2-x_1)x_1^2\cos^2\tilde{\theta}}{4x_1^3+(2-x_1)^3}}{1-\cos^2\tilde{\theta}}$$

である．

スカラー・グルーオンについても同様な計算ができる．断面積は式(9.74)

$$\frac{1}{\sigma_{\mathrm{pt}}}\cdot\frac{6\pi}{\alpha_s'}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\frac{x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)}\equiv S \tag{9.74}$$

で与えられ，右辺を変数 x_1, x_2, x_3 について対称化すれば

$$S=\frac{x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)}+\frac{x_1^2}{(1-x_2)(1-x_3)}+\frac{x_2^2}{(1-x_3)(1-x_1)}$$

$$=\frac{2}{1-\cos^2\tilde{\theta}}\left\{2+\frac{1}{x_1(1-x_1)}\cdot[(x_2^2+x_3^2)-(x_2^2-x_3^2)\cos\tilde{\theta}]\right\}$$

$$=\frac{2}{1-\cos^2\tilde{\theta}}\left\{2+\frac{1}{x_1(1-x_1)}\cdot[(2-x_1)^2+x_1(3x_1-4)\cos^2\tilde{\theta}]\right\}$$

$$=\frac{4-3x_1^2}{2x_1(1-x_1)}\cdot\frac{1}{1-\cos^2\tilde{\theta}}\cdot\left[1+\frac{x_1(3x_1-4)\cos^2\tilde{\theta}}{4-3x_1^2}\right]$$

を得る．したがって $\cos\tilde{\theta}=0$ で 1 になるように規格化すれば式(9.76) が出る．

$$\frac{d\sigma^s}{d\cos\tilde{\theta}}=\frac{1+\dfrac{x_1(3x_1-4)\cos^2\tilde{\theta}}{4-3x_1^2}}{1-\cos^2\tilde{\theta}}$$

9.9 計算すべき量は式(9.104) で定義される

$$\gamma_n=-4\int_0^1 dz\cdot z^{n-1}P_{qq}(z) \tag{9.104}$$

である．“分離関数” $P_{qq}(z)$ は式(9.97) で与えられている．

$$P_{qq}(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1+z^2}{1-z} \tag{9.97}$$

この関数は $z\to1$ で発散するから，式(9.111)，(9.112)に従って処理しなくてはならない．そのため $z=1$ の寄与を δ 関数で表し

$$P_{qq}^+(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1+z^2}{1-z}+c\delta(1-z)$$

とおき，係数 c を式(9.111)

$$\int_0^1 dz\cdot P_{qq}^+(z)=0 \tag{9.111}$$

から決める．

$$\frac{1+z^2}{1-z}=\frac{-(1-z^2)+2}{1-z}=-(1+z)+\frac{2}{1-z}$$

であるから，$z\to1$ で発散する項は δ 関数にくりこまれたと考える．式 (9.111) より c を決めると

$$\int_0^1\left[-\frac{4}{3}(1+z)+c\delta(1-z)\right]dz=-2+c=0$$

$$\therefore\quad P_{qq}^+(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1+z^2}{1-z}+2\delta(1-z)$$

第1項は $z\neq1$ の所でのみ有効で，$z=1$ では効かない (δ 関数に含まれる) と考えている．

式(9.104) より γ_n を計算する．

$$\frac{-\gamma_n}{4}=\int_0^1 z^{n-1}\cdot P_{qq}^+(z)dz=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{(1+z^2)z^{n-1}}{1-z}dz+2\int_0^1 z^{n-1}\delta(1-z)dz$$

第1項の積分を $z=1$ でも有効ならしめるためには分子を0にするように関数値をずらしておかなくてはならない．

$$\frac{(1+z^2)z^{n-1}}{1-z} \to \frac{(1+z^2)z^{n-1}-2}{1-z} = -\frac{1-z^{n-1}}{1-z} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

さて

$$\int_0^1 \frac{1-z^{n-1}}{1-z}\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-2}\int_0^1 z^k \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$\int_0^1 \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 z^k \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

$$\int_0^1 z^{n-1}\delta(1-z)\mathrm{d}z = 1$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{-\gamma_n}{4} &= \frac{-4}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) + 2\\ &= \frac{-4}{3}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{n+1}\right) + 2\\ &= \frac{-4}{3}\left(2 - \frac{1}{n(n+1)} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \gamma_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

式(9.107) により

$$d_n = \frac{3}{2(33-2f)}\cdot\gamma_n = \frac{4}{33-2f}\cdot\left(1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

である．

9.10 スカラー・グルーオンに対する分離関数は，$z=1$ で効く高次の効果を含めて式(9.115) を修正した

$$P_{\mathrm{qq}}^{+}(z) = \frac{4}{3}(1-z) + c\delta(1-z)$$

で与えられる．定数 c は正規化の条件(9.111)

$$\int_0^1 P_{\mathrm{qq}}^{+}(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{9.111}$$

から次のように決まる．

$$\int_0^1 P_{\mathrm{qq}}^{+}(z)\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\int_0^1 (1-z)\mathrm{d}z + c = \frac{2}{3} + c = 0$$

$$\therefore\quad P_{\mathrm{qq}}^{+}(z) = \frac{4}{3}(1-z) - \frac{2}{3}\delta(1-z)$$

式(9.104) に代入し

$$\frac{-\gamma_n}{4}=\int_0^1 z^{n-1}P_{qq}^{+}(z)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\int_0^1 z^{n-1}(1-z)\mathrm{d}z-\frac{2}{3}\int_0^1 z^{n-1}\delta(1-z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

式(9.107) に代入して

$$d_n=\frac{3}{2(33-2f)}\gamma_n=\frac{4}{33-2f}\cdot\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

《10 章》

10.1 恒等式

$$[(-q^2+M^2)g^{\mu\rho}+q^\mu q^\rho][Ag_{\rho\nu}+Bq_\rho q_\nu]=\delta^\mu_\nu$$

から A, B を決定する．左辺を計算すると

Aの係数：$(-q^2+M^2)\delta^\mu_\nu+q^\mu q_\nu$

Bの係数：$(-q^2+M^2)q^\mu q_\nu+q^\mu q_\nu\cdot q^2=M^2q^\mu q_\nu$

$$\therefore\quad (-q^2+M^2)A\delta^\mu_\nu+(A+M^2B)q^\mu q_\nu=\delta^\mu_\nu$$

テンソル δ^μ_ν, $q^\mu q_\nu$ は独立だから

$$(-q^2+M^2)A=1,\quad A+M^2B=0$$

$$\therefore\quad A=\frac{-1}{q^2-M^2},\quad B=-\frac{A}{M^2}=\frac{1}{M^2(q^2-M^2)}$$

10.2 (i) 付録Dにまとめてある γ 行列の性質を用いる．Pauli 表示式(D.8) を用いれば式(D.9) より $\gamma_5^2=1$ は自明であるが，特定の表示を用いなくても次のように証明できる．定義より $\gamma_5^2=-(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$ であるが，これを反交換関係(D.1) を用いて $(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2=-1$（式 (D.1) より，$(\gamma^0)^2=1$，$(\gamma^k)^2=-1$，$k=1, 2, 3$）と並べかえるためには 6 回交換を行わなくてはならない．したがって $\gamma_5^2=1$ である．この結果から

$$(1+\gamma_5)(1-\gamma_5)=1-\gamma_5^2=0$$

(ii) 式(D.11) より

$$\{\gamma_5,\ \gamma_\mu\}=\{\gamma_5,\ g_{\mu\nu}\gamma^\nu\}=g_{\mu\nu}\{\gamma_5,\ \gamma^\nu\}=0$$

したがって

$$(1+\gamma_5)\gamma_0=\gamma_0(1-\gamma_5)$$
$$(1+\gamma_5)\gamma_0\gamma_\mu=\gamma_0(1-\gamma_5)\gamma_\mu=\gamma_0\gamma_\mu(1+\gamma_5)$$

10.3 （a） $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$ は 4 階のテンソルであるから，2 階のテンソル δ_{ik}，δ_{il}，δ_{jk}，δ_{jl} の 2 つの積の線型結合として表せるはずである．ただし $(i,\ j)$，$(k,\ l)$ に関してそれぞれ反対称でなくてはならないから，その組み合わせは制限される．添字の反対称性を考慮すると $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$ は次の行列式に比例する．

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}=a\begin{vmatrix}\delta_{ik} & \delta_{il}\\ \delta_{jk} & \delta_{jl}\end{vmatrix}$$

ただし比例定数を a とおいた．係数を決めるために特別な添字をとり，たとえば $i=1$，$j=2$，$k=1$，$l=2$ とおけば $a=1$ であることがわかる．

$k=i$ とおいて縮約（i について和をとる）すれば

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{il}=(\delta_{ii}\delta_{jl}-\delta_{ji}\delta_{il})=2\delta_{jl}-\delta_{jl}=\delta_{jl}$$

さらに $l=j$ とおいて縮約（j について和をとる）すれば

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=\delta_{jj}=2$$

（b） 上の議論を 3 次元に拡張する．$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}$ は $(i,\ j,\ k)$，$(l,\ m,\ n)$ についてそれぞれ完全反対称であるから未定係数 a を用いて

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=a\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$$

と書ける．$i=1$，$j=2$，$k=3$，$l=1$，$m=2$，$n=3$ とおいて両辺を比較すれば $a=1$ を得る．

$l=i$ とおいて縮約すると $\sum_i \delta_{ii}=3$ だから

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\begin{vmatrix}\delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$$

$$=\delta_{ii}\begin{vmatrix}\delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}-\delta_{ji}\begin{vmatrix}\delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}+\delta_{ki}\begin{vmatrix}\delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jm} & \delta_{jn}\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}\delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\delta_{km} & \delta_{kn}\\ \delta_{jm} & \delta_{jn}\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}\delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$$

さらに $m=j$ とおいて縮約すると

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=\begin{vmatrix}\delta_{jj} & \delta_{jn}\\ \delta_{kj} & \delta_{kn}\end{vmatrix}=3\delta_{kn}-\delta_{kn}=2\delta_{kn}$$

さらに $n=k$ とおいて縮約すると

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\cdot\delta_{kk}=2\cdot 3=3!$$

（c） 4 次元の擬 Euclid 空間に議論を拡張する．前と同じ理由で

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'}=a\begin{vmatrix}\delta_{\mu}^{\mu'} & {}_{\mu}^{\nu'} & \delta_{\mu}^{\alpha'} & \delta_{\mu}^{\beta'}\\ \delta_{\nu}^{\mu'} & \delta_{\nu}^{\nu'} & \delta_{\nu}^{\alpha'} & \delta_{\nu}^{\beta'}\\ \delta_{\alpha}^{\mu'} & \delta_{\alpha}^{\nu'} & \delta_{\alpha}^{\alpha'} & \delta_{\alpha}^{\beta'}\\ \delta_{\beta}^{\mu'} & \delta_{\beta}^{\nu'} & \delta_{\beta}^{\alpha'} & \delta_{\beta}^{\beta'}\end{vmatrix}$$

である．$\mu=0$, $\nu=1$, $\alpha=2$, $\beta=3$, $\mu'=0$, $\nu'=1$, $\alpha'=2$, $\beta'=3$ とおいて両辺を比較すると，今度は

$$\varepsilon_{0123}\varepsilon^{0123}=-1=a$$

である．

$\mu'=\mu$ とおいて縮約すると

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu'\alpha'\beta'}=-\begin{vmatrix}\delta_{\mu}^{\mu} & \delta_{\mu}^{\nu'} & \delta_{\mu}^{\alpha'} & \delta_{\mu}^{\beta'}\\ \delta_{\nu}^{\mu} & \delta_{\nu}^{\nu'} & \delta_{\nu}^{\alpha'} & \delta_{\nu}^{\beta'}\\ \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\alpha}^{\nu'} & \delta_{\alpha}^{\alpha'} & \delta_{\alpha}^{\beta'}\\ \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\nu'} & \delta_{\beta}^{\alpha'} & \delta_{\beta}^{\beta'}\end{vmatrix}$$

第 1 列で展開しながら μ の和を行う．この行列式の (1, 1) 要素の余因子を D とおけば

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu'\alpha'\beta'}=-(4D-D-D-D)=-D$$

$$=-\begin{vmatrix} \delta_\nu^{\nu'} & \delta_\nu^{\alpha'} & \delta_\nu^{\beta'} \\ \delta_\alpha^{\nu'} & \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} \\ \delta_\beta^{\nu'} & \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} \end{vmatrix}$$

さらに $\nu'=\nu$ とおいて縮約すれば同様に

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha'\beta'}=-\begin{vmatrix} \delta_\nu^{\nu} & \delta_\nu^{\alpha'} & \delta_\nu^{\beta'} \\ \delta_\alpha^{\nu} & \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} \\ \delta_\beta^{\nu} & \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} \end{vmatrix}$$

$$=-(4-1-1)\begin{vmatrix} \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} \\ \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} \\ \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} \end{vmatrix}$$

さらに $\alpha'=\alpha$ とおいて縮約すれば

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta'}=-2\begin{vmatrix} \delta_\alpha^{\alpha} & \delta_\alpha^{\beta'} \\ \delta_\beta^{\alpha} & \delta_\beta^{\beta'} \end{vmatrix}=-2(4\delta_\beta^{\beta'}-\delta_\beta^{\beta'})=-2\cdot 3\delta_\beta^{\beta'}$$

さらに $\beta'=\beta$ とおいて縮約すれば

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}=-4!$$

10.4 パイオン，ニュートリノ，陽電子の 4 元運動量をそれぞれ p, k, k' で表す．パイオンはスピン 0 であるから，電子・ニュートリノの $V-A$ カレントと結合しうるベクトル量は運動量しかない．独立な運動量は p, k の 2 つであるが，後者は遷移の行列要素に寄与しない．ニュートリノは質量 0 の Dirac 方程式 $\bar{u}(\nu)\not{k}=0$ を満たすので

$$k^\mu\bar{u}(\nu)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v(\mathrm{e})$$
$$=\bar{u}(\nu)\not{k}(1-\gamma_5)v(\mathrm{e})=0$$

となるからである．したがってパイオンと電子・ニュートリノの弱いカレントとの結合の強さを表す定数を f_π とすれば，図 1 に示す点相互作用の不変行列要素は

$$F=\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}\cdot f_\pi\cdot p^\mu\bar{u}(k,\ s)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v(k',\ s')$$

と書ける．

不変行列要素から崩壊率（単位時間に崩壊する確率，平均寿命の逆数）Γ を算出する公式(F.16) は，5.4 節の断面積の公式を少しく修正して導くことがで

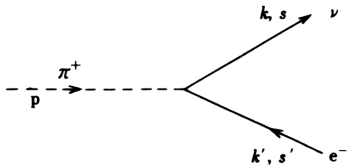


図 1

きる，式(5.79) より終わりの状態を指定したときの単位体積・単位時間あたりの遷移確率 P_{fi} は

$$P_{\mathrm{fi}}=(2\pi)^4\delta(p-k-k')\cdot\frac{1}{V^3}\cdot|F|^2$$

である．ただし規格化式(5.77) を用いた．式(5.81) のすぐ次にあるように，単位体積中にある崩壊粒子の数は，その静止系で $2m/V$ (ただし m は崩壊する粒子の質量)である．したがって P_{fi} を $2m/V$ で割り，終わりの 2 粒子状態の相空間の体積を乗ずると

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{V}{2m}\cdot(2\pi)^4\delta(p-k-k')\cdot\frac{1}{V^3}\cdot|F|^2\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\cdot\frac{V}{(2\pi)_3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3k'}{2E_{k'}}$$

$$\equiv\frac{1}{2m}\cdot|F|^2\cdot\mathrm{dLips}(m^2,\ k,\ k')$$

$$\mathrm{dLips}(m^2,\ k,\ k')=(2\pi)^4\delta(p-k-k')\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3k'}{2E_{k'}}$$

を得る．

不変行列要素の 2 乗は式(10.96) と類似の形に書ける．パイオンの自由度のテンソルを $M^{\mu\nu}$，レプトン・カレントのテンソルを $L_{\mu\nu}$ とするとき

$$|F|^2=\frac{G_{\mathrm{F}}{}^2}{2}\cdot|f_\pi|^2\cdot M^{\mu\nu}L_{\mu\nu}$$

$$M^{\mu\nu}=p^\mu p^\nu$$

$$L_{\mu\nu}=\sum_s\sum_{s'}[\bar{u}(k,\ s)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v(k',\ s')]^\dagger$$

$$\times[\bar{u}(k,\ s)\gamma_\nu(1-\gamma_5)v(k',\ s')]$$

$$=\sum_s\sum_{s'}[\bar{v}(k',\ s')\gamma^0(1-\gamma_5)\gamma_\mu\gamma^0u(k,\ s)]$$

$$\times[\bar{u}(k,\ s)\gamma_\nu(1-\gamma_5)v(k',\ s')]$$

式(D.17) より

$$\gamma^0(1-\gamma_5)\gamma_\mu\gamma^0=\gamma^0(1-\gamma_5)\gamma^0\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0=(1+\gamma_5)\gamma_\mu=\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$

だから定石どおり (6.4 節参照)

$$L_{\mu\nu}=\sum_s\sum_{s'}[\bar{v}(k',\ s')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(k,\ s)]$$
$$\times[\bar{u}(k,\ s)\nu_\nu(1-\gamma_5)v(k',\ s')]$$
$$=\mathrm{Tr}\,[\not{k}'-m_\mathrm{e})\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma_\nu(1-\gamma_5)]$$

を得る. m_e は電子質量であるが, これを含む項は奇数個の γ 行列を含むので対角和に寄与しない.

$$\therefore\quad L_{\mu\nu}=\mathrm{Tr}[\not{k}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma_\nu(1-\gamma_5)]=2\mathrm{Tr}[\not{k}'\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu(1-\gamma_5)]$$

対角和の計算は式(10.98)と同じである. 質量項を含まないから, γ_5 を含まない部分は式(6.88) を利用するとよい.

$$\therefore\quad L_{\mu\nu}=8\,[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu-(k'\cdot k)g_{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k'^\alpha k^\beta]$$

パイオンのテルソンとの縮約は容易で, 結果は

$$M^{\mu\nu}L_{\mu\nu}=8\,[2(p\cdot k')(p\cdot k)-(k'\cdot k)(p\cdot p)]$$

である. $M^{\mu\nu}$ は μ, ν について対称であるから, μ, ν について反対称な $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ との縮約は恒等的に 0 である.

さてパイオンの静止系では (記号は自明であろう)

$$p=(m_\pi,\ 0),\quad k=(E_\nu,\ \boldsymbol{p}_\nu),\quad k'=(E_\mathrm{e},\ \boldsymbol{p}_\mathrm{e})$$
$$2\,(p\cdot k')(p\cdot k)-(k\cdot k')(p\cdot p)=2m_\pi^2E_\mathrm{e}E_\nu-m_\pi^2(E_\mathrm{e}E_\nu-\boldsymbol{p}_\mathrm{e}\cdot\boldsymbol{p}_\nu)$$
$$=m_\pi^2(E_\mathrm{e}E_\nu+\boldsymbol{p}_\mathrm{e}\cdot\boldsymbol{p}_\nu)$$

であるから

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{1}{2m_\pi}\cdot\frac{G_\mathrm{F}^2}{2}\cdot|f_\pi|^2\cdot 8m_\pi^2(E_\mathrm{e}E_\nu+\boldsymbol{p}_\mathrm{e}\cdot\boldsymbol{p}_\nu)\cdot\frac{1}{4(2\pi)^2}$$
$$\times\delta(m_\pi-E_\mathrm{e}-E_\nu)\delta(\boldsymbol{p}_\mathrm{e}+\boldsymbol{p}_\nu)\cdot\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mathrm{e}}{E_\mathrm{e}}\cdot\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\nu}{E_\nu}$$
$$\equiv\frac{G_\mathrm{F}^2}{2\cdot(2\pi)^2}\cdot|f_\pi|^2\cdot m_\pi\cdot\mathrm{d}I$$
$$I=\int\frac{E_\mathrm{e}E_\nu+\boldsymbol{p}_\mathrm{e}\cdot\boldsymbol{p}_\nu}{E_\mathrm{e}E_\nu}\cdot\delta(m_\pi-E_\mathrm{e}-E_\nu)\delta(\boldsymbol{p}_\mathrm{e}+\boldsymbol{p}_\nu)\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mathrm{e}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\nu$$

相空間の積分のうち $\int d^3\boldsymbol{p}_\nu$ は自明で，$\boldsymbol{p}_\nu$ を $-\boldsymbol{p}_e$ でおきかえればよい．

$$I=\int\frac{E_eE_\nu-\boldsymbol{p}_e^2}{E_eE_\nu}\cdot\delta(m_\pi-E_e-E_\nu)d^3\boldsymbol{p}_e$$

ただしこの式の中の E_e や E_ν は $\boldsymbol{p}_e$ のみの関数である．

$$E_e=\sqrt{\boldsymbol{p}_e^2+m_e^2},\quad E_\nu=|\boldsymbol{p}_\nu|=|\boldsymbol{p}_e|$$

被積分関数は $|\boldsymbol{p}_e|\equiv p_e$ だけの関数だから，$d^3\boldsymbol{p}_e=4\pi p_e^2dp_e$ と書き直すと

$$I=4\pi\int\frac{p_e^2(E_e-p_e)}{E_e}\cdot\delta(m_\pi-\sqrt{p_e^2+m_e^2}-p_e)dp_e$$

δ 関数の積分公式（E.34）によれば

$$\delta(f(x))=\frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x)|}\bigg|_{f(x_0)=0}=\frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}\bigg|_{f(x_0)=0}$$

である．δ 関数の引数が 0 になるような p_e の値は

$$m_\pi=\sqrt{p_e^2+m_e^2}+p_e$$

を解いて $p_e=\dfrac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}$ である．これから

$$f(p)=m_\pi-\sqrt{p_e^2+m_e^2}-p_e$$

$$|f'(p)|=\frac{p_e}{\sqrt{p_e^2+m_e^2}}+1=\frac{p_e+E_e}{E_e}=\frac{E_\nu+E_e}{E_e}=\frac{m_\pi}{E_e}$$

$$E_e-p_e=m_\pi-2p_e=\frac{m_e^2}{m_\pi}$$

が得られるから

$$I=4\pi\cdot\frac{m_e^2}{m_\pi^2}\cdot\left(\frac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}\right)^2=\pi m_\pi^2\left(\frac{m_e}{m_\pi}\right)^2\left(1-\frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

となる．

$$\therefore\quad \Gamma=\frac{G_F^2}{2\cdot(2\pi)^2}\cdot|f_\pi|^2\cdot\pi m_\pi^3\left(\frac{m_e}{m_\pi}\right)^2\left(1-\frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

$$=\frac{G_F^2}{8\pi}\cdot|f_\pi|^2\cdot m_\pi^3\cdot\left(\frac{m_e}{m_\pi}\right)^2\cdot\left(1-\frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

ミューオンに崩壊するときはこの式で $m_e\to m_\mu$ とおきかえればよい．

$$\therefore\quad \frac{\Gamma(\pi^+\to e^+\nu)}{\Gamma(\pi^+\to\mu^+\nu)}=\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\cdot\left(\frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2-m_\mu^2}\right)^2=1.28\times10^{-4}$$

10.5 図 2 に示すように，ミューオンと電子のカレントにそれぞれ 4 元運動

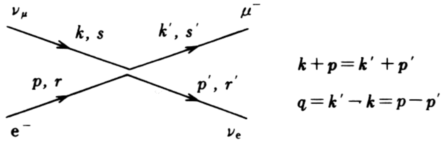


図 2

量 k, k' および p, p' をわりあてる．4 フェルミオン相互作用による不変振幅は

$$F=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\,\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(k,\ s)\bar{u}(p',\ r')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p,\ r)$$

である．ミューオンのテンソル $N_{\mu\nu}$ と電子のテンソル $E^{\mu\nu}$ を用いて式(5.89)がただちに得られる．

$$|F|^2=\frac{G_F^2}{2}\cdot N_{\mu\nu}E^{\mu\nu}$$

$$N_{\mu\nu}=\sum_s\sum_{s'}[\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(k,\ s)]^\dagger[\bar{u}(k',\ s')\gamma_\nu(1-\gamma_5)u(k,\ s)]$$
$$=\mathrm{Tr}\,[\not{k}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma_5)]$$
$$=2\mathrm{Tr}\,[\not{k}\gamma_\mu\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma_5)]$$

$$E^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_r\sum_{r'}[\bar{u}(p',\ r')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p,\ r)]^\dagger[\bar{u}(p',\ r')\gamma^\nu(1-\gamma_5)$$
$$\times u(p,\ r)]$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\not{p}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}'\gamma^\nu(1-\gamma_5)]$$
$$=\mathrm{Tr}\,[\not{p}\gamma^\mu\not{p}'\gamma^\nu(1-\gamma_5)]$$

対角和の公式(6.63) により

$$\mathrm{Tr}\,[\not{k}\gamma_\mu\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma_5)]=\mathrm{Tr}\,[\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma_\mu]$$
$$=\mathrm{Tr}\,[\not{k}'\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu(1-\gamma_5)]$$

であり，μ, ν は擬標にすぎないからこれは式(10.97) と一致する．$E^{\mu\nu}$ も同じように一致する．対角和の計算は前問と同じである．

$$N_{\mu\nu}=8\,[k_\mu k'_\nu+k_\nu k'_\mu-(k\cdot k')g_{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k^\alpha k'^\beta]$$
$$E^{\mu\nu}=4\,[p^\mu p'^\nu+p^\nu p'^\mu-(p\cdot p')g^{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda p'_\rho]$$

粒子の質量を無視する近似では

$$q^2=(k'-k)^2=k'^2-2(k,\ k')+k^2=-2(k,\ k')$$

であるから，式(10.108)，(10.109) が導かれた．式(10.110) を証明するにはテンソル $N_{\mu\nu}$ の定義にもどって

$$q^\mu N_{\mu\nu}=\sum_s\sum_{s'}[\bar{u}(k',\ s')(\not{k}'-\not{k})(1-\gamma_5)u(k,\ s)]^\dagger$$
$$\times[\bar{u}(k,\ s)\gamma_\nu(1-\gamma_5)u(k,\ s)]$$

$\not{k}(1-\gamma_5)=(1+\gamma_5)\not{k}$ に注意すると，質量を持たない Dirac 方程式 $\bar{u}(k',\ s')\not{k}'=0$, $\not{k}u(k,\ s)=0$ から $q^\mu N_{\mu\nu}=0$ である．$q^\nu N_{\mu\nu}=0$ も同様に証明できる．したがってテンソル $N_{\mu\nu}$, $E^{\mu\nu}$ の縮約に関しては，$E^{\mu\nu}$ の中で，$p'=p+q\to p$ とおきかえてさしつかえない．すなわち実効的に

$$E^{\mu\nu}_{\rm eff}=4\,[2p^\mu p^\nu-(p\cdot p')g^{\mu\nu}-{\rm i}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda p'_\rho]$$

である．各テンソルは $p^\mu p^\nu$，$g^{\mu\nu}$ のような添字について対称な部分と，$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ のような反対称な部分から成るが，対称な部分と反対称な部分の縮約は恒等的に 0 である．縮約の結果を対称な部分どうしからくる項 S と反対称な部分どうしからくる A にわかつと

$$N_{\mu\nu}E^{\mu\nu}=N_{\mu\nu}E^{\mu\nu}_{\rm eff}=32(S+A)$$
$$S=4(p\cdot k)(p\cdot k')-2(k\cdot k')(p\cdot p)-2(p\cdot p')(k\cdot k')+4(p\cdot p')(k\cdot k')$$
$$=4(p\cdot k)(p\cdot k')+2(p\cdot p')(k\cdot k')$$

ただし質量を無視する近似で $(p\cdot p)=0$ とした．式(10.114) に定義された Mandelstam 変数を用いよう．

$$q^2=(p'-p)^2=p'^2-2(p\cdot p')+p^2=-2(p\cdot p')=t$$

であるから式(10.115) を用いて

$$S=-su+\frac{t^2}{2}=-su+\frac{1}{2}(s+u)^2=\frac{1}{2}(s^2+u^2)$$

となる．一方，式(10.107) より

$$A=-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}k^\alpha k'^\beta p_\lambda p'_\rho$$
$$=2\,(\delta^\lambda_\alpha\delta^\rho_\beta-\delta^\lambda_\beta\delta^\rho_\alpha)k^\alpha k'^\beta p_\lambda p'_\rho$$
$$=2\,[(p\cdot k)(p'\cdot k')-(p\cdot k')(p'\cdot k)]$$

$p'+k'=p+k$ の両辺を 2 乗して

$$(p'\cdot k')=(p\cdot k)=\frac{1}{2}s$$

$p'-k=p-k'$ の両辺を 2 乗して

$$(p'\cdot k)=(p\cdot k')=-\frac{u}{2}$$

を得るから

$$A=\frac{1}{2}(s^2-u^2)$$

である．したがって，式(10.117)

$$N_{\mu\nu}E^{\mu\nu}=16(s^2+u^2)+16(s^2-u^2)=32s^2$$

が証明された．断面積の式(5.122) より

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{16\pi s^2}\cdot|F|^2=\frac{1}{16\pi s^2}\cdot\frac{G_\mathrm{F}^2}{2}\cdot 32s^2=\frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}$$

t を重心系の 3 元運動量の大きさ p と角度 θ に変換すると式(5.118) より

$$\mathrm{d}t=2p^2\mathrm{d}(\cos\theta)$$

また質量を無視する近似で $s=(2p)^2=4p^2$ だから

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}(\cos\theta)}=\frac{G_\mathrm{F}^2}{2\pi}\cdot s$$

t は数値的に負の量なので符号を考慮すれば

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}=\frac{G_\mathrm{F}^2}{2\pi}\cdot s\cdot\sin\theta$$

全断面積は角度について積分すれば求められる．

$$\sigma=\frac{G_\mathrm{F}^2}{2\pi}\cdot s\cdot\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}\cdot s$$

《11 章》

11.1 （a） 式(11.14) より

$$W_{(\nu)}^{\mu\nu}=(-g^{\mu\nu})W_1^{(\nu)}+\frac{1}{M^2}p^\mu p^\nu W_2^{(\nu)}-\frac{\mathrm{i}}{2M^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda q_\delta W_3^{(\nu)}$$

式(10.108) より

$$N_{\mu\nu}=8\left[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+\frac{q^2}{2}g_{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k^\alpha k'^\beta\right]$$

であるが，レプトンの質量を無視する近似では $q^2=-2(k\cdot k')$ である．W と N

の縮約を行うとき，添字について共に対称の部分と，共に反対称の部分しか 0 でない．縮約の結果は

$$8\,W_1^{(\nu)}\text{ の係数：}-2(k\cdot k')-2q^2$$

$$\frac{8}{M^2}W_2^{(\nu)}\text{ の係数：}2(p\cdot k)(p\cdot k')+\frac{1}{2}q^2(p\cdot p)$$

$$\frac{-4}{M^2}W_3^{(\nu)}\text{ の係数：}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}k^\alpha k'^\beta p_\lambda q_\rho=-2(\delta_\alpha^\lambda\delta_\beta^\rho-\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\lambda)k^\alpha k'^\beta p_\lambda q_\rho$$

$$=-2\,[(p\cdot k)(q\cdot k')-(q\cdot k)(p\cdot k')]$$

とまとめられる．

実験室系で陽子の質量を $\boldsymbol{M}$，入射ニュートリノおよび射出ミューオンの 3 元運動量をそれぞれ $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}'$ とすれば

$$p=(\boldsymbol{M},\ 0),\quad k=(k,\ \boldsymbol{k}),\quad k'=(k',\ \boldsymbol{k}'),\quad \theta=\angle(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}')$$

である．$k=|\boldsymbol{k}|$，$k'=|\boldsymbol{k}'|$ とおいたが 4 元運動量との混乱はあるまい．必要な不変量を実験室系の変数で表すと

$$(p\cdot p)=M^2,\quad (p\cdot k)=Mk,\quad (p\cdot k')=Mk'$$

$$q^2=(k-k')^2=-2(k\cdot k')=-2kk'(1-\cos\theta)=-4kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$(k\cdot k')=kk'(1-\cos\theta)=2kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$(q\cdot k')=(k-k',\ k')=(k\cdot k')=2kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$(q\cdot k)=(k-k',\ k)=-(k\cdot k')=-2kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

これを前の式に代入すると

$$-16\,W_1^{(\nu)}\text{ の係数：}-2kk'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{8}{M^2}W_2^{(\nu)}\text{ の係数：}2M^2kk'-2M^2kk'\sin^2\frac{\theta}{2}=2M^2kk'\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{8}{M^2}W_3^{(\nu)}\text{ の係数：}2Mk^2k'\sin^2\frac{\theta}{2}+2Mkk'^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$=2M^2kk'\cdot\frac{k+k'}{M}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad N_{\mu\nu}W^{\mu\nu}_{(\nu)}=16kk'\left[2W_1^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2^{(\nu)}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{k+k'}{M}\cdot W_3^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

実験室系の断面積の式(11.16)

$$\mathrm{d}\sigma^{(\nu)}=\frac{G_F^2}{2}\cdot\frac{1}{4(p\cdot k)}\cdot 4\pi M\cdot N_{\mu\nu}W^{\mu\nu}_{(\nu)}\cdot\frac{\mathrm{d}^3k'}{2k'(2\pi)^3}$$

に現れる量を変換する．式(7.13) より

$$\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}k'=\frac{1}{2kk'}\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu$$

であるから

$$\mathrm{d}k'^3=k'^2\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega=2\pi k'^2\mathrm{d}k'\mathrm{d}(\cos\theta)=\pi\cdot\frac{k'}{k}\mathrm{d}^2Q\mathrm{d}\nu$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu)}}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}=\frac{G_F^2}{2}\cdot\frac{4\pi M}{4kM}\cdot 16kk'[\cdots\cdots]\cdot\frac{1}{2k'(2\pi)^3}\cdot\frac{\pi k'}{k}$$

$$=\frac{G_F^2}{2\pi}\cdot\frac{k'}{k}\cdot\left[W_1^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2^{(\nu)}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{k+k'}{M}\cdot W_3^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

これは式(11.17) である．

（b） 式(7.15)，(7.16)，(7.12) で導入された変数は

$$x=\frac{Q^2}{2M\nu},\quad y=\frac{\nu}{k}=\frac{k-k'}{k}$$

である．k, k' はそれぞれ実験室系の入射ニュートリノ，射出ミューオンの 3 元運動量の大きさである．物理的に x は陽子の 4 元運動量のうちパートンが受け持っている割合，y は実験室系で標的に移行するエネルギーの割合を表す．問題 7.2 で導いたように（式(7.17)）

$$\mathrm{d}^2Q\mathrm{d}\nu=2Mk^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

である．また k, k' を x, y, ν で表すと

$$k=\frac{\nu}{y},\quad k'=\nu\cdot\frac{1-y}{y}$$

であり，定義 $Q^2=-q^2$ より

$$\frac{k'\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{M}=\frac{Q^2}{4Mk}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{2M\nu}\cdot\frac{\nu}{k}=\frac{1}{2}xy$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}xy\cdot\frac{M}{k'}=\frac{M}{2}\cdot\frac{xy^2}{\nu(1-y)}$$

と表すことができる．

さて

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}=\frac{G_F^2}{2\pi}\cdot\frac{k'}{k}\left[2W_1^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2^{(\nu)}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{k+k'}{M}W_3^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

の左辺を変数 x，y で書き直すと

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=2Mkk'y\cdot\frac{G_F^2}{2\pi}\cdot[\cdots\cdots]$$

また質量を無視する近似で

$$s=(p+k)^2=2(p\cdot k)=2Mk$$

であるから

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=s\nu(1-y)\cdot\frac{G_F^2}{2\pi}\cdot[\cdots\cdots]$$

である．括弧の中の第 1 項は $\nu\to\infty$ のとき

$$\nu(1-y)\cdot 2W_1^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}=\nu(1-y)\cdot 2W_1^{(\nu)}\cdot\frac{Mxy^2}{2\nu(1-y)}$$
$$=MW_1^{(\nu)}\cdot xy^2\to F_1^{(\nu)}xy^2$$

第 2 項は

$$\nu(1-y)\cdot W_2^{(\nu)}\cos^2\frac{\theta}{2}=\nu(1-y)\cdot W_2^{(\nu)}\cdot\left[1-\frac{Mxy^2}{2\nu(1-y)}\right]$$
$$\sim\nu W_2^{(\nu)}\cdot(1-y)\to F_2^{(\nu)}(1-y)$$

第 3 項は

$$\nu(1-y)\cdot\frac{k+k'}{M}W_3^{(\nu)}\sin^2\frac{\theta}{2}=\nu(1-y)\cdot\frac{2\nu}{yM}\left(1-\frac{y}{2}\right)W_3^{(\nu)}\cdot\frac{Mxy^2}{2\nu(1-y)}$$
$$=\nu W_3^{(\nu)}\cdot xy\left(1-\frac{y}{2}\right)\to F_3^{(\nu)}xy\left(1-\frac{y}{2}\right)$$

となるから

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F^2}{2\pi}\cdot s\cdot\left[F_1^{(\nu)}xy^2+F_2^{(\nu)}(1-y)+F_3^{(\nu)}xy\left(1-\frac{y}{2}\right)\right]$$

（c） Callan-Gross の関係式 $2xF_1^{(\nu)}=F_2^{(\nu)}$ を用いて $F_1^{(\nu)}$ を消去すれば

$$F_1^{(\nu)}xy^2+F_2^{(\nu)}(1-y)=F_2^{(\nu)}\left[\frac{y^2}{2}+(1-y)\right]=F_2^{(\nu)}\cdot\frac{y^2+2(1-y)}{2}$$

$$=F_2^{(\nu)}\cdot\frac{1+(1-y)^2}{2}$$

$$\left(1-\frac{y}{2}\right)xy=x\cdot\frac{2y-y^2}{2}=x\cdot\frac{1-(1-y)^2}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F^2}{2\pi}\cdot s\cdot F_2^{(\nu)}\left[\frac{1+(1-y)^2}{2}+\frac{xF_3^{(\nu)}}{F_2^{(\nu)}}\cdot\frac{1-(1-y)^2}{2}\right]$$

この式の右辺の物理的解釈は，問題 11.2 (c) に与えられている．

11.2 (a) クォーク・ニュートリノ散乱と反クォーク・ニュートリノ散乱の不変振幅を比較する．ニュートリノの初めと終わりの 4 元運動量を k, k' クォーク（反クォーク）の初めと終わりの 4 元運動量を p, p' とするとき，問題 10.5 より

$$F_{\nu q}=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\cdot\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(k,\ s)\cdot\bar{u}(p',\ r')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p,\ r)$$

$$F_{\nu\bar{q}}=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\cdot\bar{u}(k',\ s')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(k,\ s)\cdot\bar{v}(p,\ r)\gamma^\mu(1-\gamma_5)v(p',\ r')$$

である．反クォークの散乱では終わりの状態の反クォークを創るときに振幅 v, 初めの状態の反クォークを消すときに $\bar{v}$ がいることに注意せよ．$|F|^2$ を計算するにあたって，ニュートリノのテンソル $N_{\mu\nu}$ は同じである．クォークの質量を無視するときは

$$\sum_s \bar{u}(p,\ s)u(p,\ s)=\sum_s \bar{v}(p,\ s)v(p,\ s)=\not{p}$$

であるから，反クォークのテンソル $\bar{Q}^{\mu\nu}$ はクォークのテンソル $Q^{\mu\nu}$ から置き換え $p\to p'$, $p'\to p$ で得られる．問題 10.5 の結果

$$N_{\mu\nu}Q^{\mu\nu}/32=4(p\cdot k)(p\cdot k')+2(p\cdot p')(k\cdot k')$$
$$+2\left[(p\cdot k)(p'\cdot k')-(p\cdot k')(p'\cdot k)\right]$$

から

$$N_{\mu\nu}\bar{Q}^{\mu\nu}/32=4(p'\cdot k)(p'\cdot k')+2(p\cdot p')(k\cdot k')$$
$$+2\left[(p'\cdot k)(p\cdot k')-(p'\cdot k')(p\cdot k)\right]$$

である．不変量を Mandelstam 変数で表すと（問題 10.5 参照）

$$N_{\mu\nu}\bar{Q}^{\mu\nu}/32=-su+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}(u^2-s^2)$$

一方 $s+t+u=0$ より $t^2-s^2=u^2+2us$ であるから

$$N_{\mu\nu}\overline{Q}^{\mu\nu}/32=u^2$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}(\nu\bar{q})=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}\cdot\frac{u^2}{s^2}$$

実験室系では問題 11.1 で示したように

$$\frac{u}{s}=\frac{-2(p\cdot k')}{2(p\cdot k)}=-\frac{k'}{k}=-(1-y)$$

が成り立つから

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}(\nu\bar{q})=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}\cdot(1-y)^2$$

（b） 弾性散乱の式を形式的に非弾性散乱の式に書きかえる．$t=q^2=-Q^2$ であるから符号を別として $\mathrm{d}t=\mathrm{d}Q^2$,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}Q^2}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}\cdot(1-y)^2$$

これを 2 重断面積に書きかえると

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}\cdot(1-y)^2\cdot\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2m}\right)$$

ただし m はクォークの質量である．一方式(7.17) より

$$\mathrm{d}^2Q\mathrm{d}\nu=2Mk^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

問題 11.1 より

$$s=2Mk,\quad k=\frac{\nu}{y}$$

またクォークの質量 m と核子の質量 M との関係は式(7.21) および(7.23) により $m=xM$ と仮定されるから（実はこれが本来の x の意味である），式 (7.30) より

$$\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2m}\right)=\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2Mx}\right)=\frac{x}{\nu}\delta\left(x-\frac{Q^2}{2M\nu}\right)$$

これらの表式を結合すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}\cdot(1-y)^2\cdot 2Mk^2y\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2Mx}\right)$$

$$=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}\cdot sx\cdot(1-y)^2\cdot\delta\left(x-\frac{Q^2}{2M\nu}\right)$$

（c） 核子がクォークと反クォークから成るとすれば，（b）よりニュートリ

ノ・核子非弾性散乱の断面積は，弾性散乱を表す δ 関数をとり去って

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F^2}{2}\cdot sx[q(x)+\bar{q}(x)\cdot(1-y)^2]$$

である．ただし $q(x)$，$\bar{q}(x)$ はクォークと反クォークの存在確率(分布)を表す．

一方問題 11.1(c)よりニュートリノ・核子非弾性散乱の断面積は

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu)}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F^2}{2\pi}\cdot s\left[F_2^{(\nu)}\cdot\frac{1+(1-y)^2}{2}+xF_3^{(\nu)}\cdot\frac{1-(1-y)^2}{2}\right]$$
$$=\frac{G_F^2}{4\pi}\cdot s[(F_2^{(\nu)}+xF_3^{(\nu)})+(F_2^{(\nu)}+xF_3^{(\nu)})(1-y)^2]$$

である．両者を比較して

$$4xq(x)=F_2^{(\nu)}+xF_3^{(\nu)},\quad 4x\bar{q}(x)=F_2^{(\nu)}+xF_3^{(\nu)}$$

これを書き直すと

$$F_2^{(\nu)}(x)=2x[q(x)+\bar{q}(x)],\quad F_3^{(\nu)}(x)=2[q(x)-\bar{q}(x)]$$
$$\therefore\quad \frac{xF_3^{(\nu)}(x)}{F_2^{(\nu)}(x)}=\frac{q(x)-\bar{q}(x)}{q(x)+\bar{q}(x)}$$

《12 章》

12.1 (a) 10.4 節の議論をふりかえれば，式(10.74) の表示

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

のもとで，質量を持たない自由な Dirac 方程式の正エネルギー解（粒子解）は

$$u=\sqrt{E}\begin{pmatrix}\phi_+\\ \phi_-\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\phi_\pm=\pm\phi_\pm$$

と書ける．規格化 $u^\dagger u=2E$ より $\phi_+{}^\dagger\phi_+=\phi_-{}^\dagger\phi_-=1$ である．運動量の方向が $\hat{\boldsymbol{p}}=(\hat{p}_x,\ \hat{p}_y,\ \hat{p}_z)=(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$ で指定されるとき，2 次元スピノール $\phi_+=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ の満たす方程式は

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})=\sigma_x\hat{p}_x+\sigma_y\hat{p}_y+\sigma_z\hat{p}_z$$
$$=\sin\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} (1-\cos\theta)a-\sin\theta\cdot b=0 \\ \sin\theta\cdot a-(1+\cos\theta)b=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad b=\tan\frac{\theta}{2}\cdot a$$

未定係数 a は規格化条件 $\phi_+{}^\dagger\phi_+=1$ より $a=\cos\frac{\theta}{2}$ と決まる．したがって

$$\phi_+=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

である．まったく同様に

$$\phi_-=\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

（b）　与えられた振幅

$$\bar{v}(\mathrm{R})\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\mathrm{L})\cdot\bar{u}(\mathrm{L})\gamma^\mu(1-\gamma_5)v(\mathrm{R})$$

の中の因子 $(1-\gamma_5)$ は自動的に左回りの粒子，右回りの反粒子を取り出すことは

$$\bar{v}(\mathrm{R})\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\mathrm{L})=\frac{1}{2}v^+(\mathrm{R})\gamma^0\gamma_\mu(1-\gamma_5)^2u(\mathrm{L})$$

$$=\frac{1}{2}[(1-\gamma_5)v(\mathrm{R})]^\dagger\gamma^0\gamma_\mu[(1-\gamma_5)u(\mathrm{L})]$$

から明らかである（式 (10.80)，(10.81) 参照）．したがって u，v の表示が必ずしもヘリシティーの固有状態になっていなくてもさしつかえない．（ヘリシティーの固有状態としての粒子・反粒子解は別解 (b′) で論ずる．）エネルギーの固有状態として粒子・反粒子の区別が明らかになっている解は，3.5 節に与えられている．すなわち，表示

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

をとったとき，ゼロ質量の Dirac 方程式の粒子解 $u(\boldsymbol{p})$，反粒子解 $v(\boldsymbol{p})$ は

$$u(\boldsymbol{p})=\sqrt{E}\begin{pmatrix} 1 \\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) \end{pmatrix}\phi_s,\quad s=1,\ 2$$

$$v(\boldsymbol{p})=\sqrt{E}\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) \\ 1 \end{pmatrix}\chi_s,\quad s=1,\ 2$$

である．$\phi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\phi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は粒子のスピン上向き，下向きの状態，$\chi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\chi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は反粒子のスピン上向き，下向きの状態を表す．反粒子の E，$\boldsymbol{p}$，s はいずれも物理的な“粒子”として持つエネルギー，運動量，スピンである．またこの表示では

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\gamma_0,\quad \gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}=-\gamma_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

である（式(D.8)）．

いま重心系で μ^- 粒子の運動量の方向が $\hat{\boldsymbol{p}}=(0,\ 0,\ 1)$，$\bar{\nu}_\mu$“粒子”の方向が $\hat{\boldsymbol{p}}=(0,\ 0,\ -1)$ であるとすれば

$$u(\mu^-)=\sqrt{E}\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}\phi_s,\quad v(\bar{\nu}_\mu)=\sqrt{E}\begin{pmatrix} -\sigma_3 \\ 1 \end{pmatrix}\chi_s$$

であるから，スピン指標を指定したうえで

$$\bar{v}(\bar{\nu}_\mu,\ s')\gamma_0(1-\gamma_5)u(\mu^-,\ s)=E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\gamma^0\gamma_0(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}\phi_s$$

$$=E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}\phi_s=E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix} 1-\sigma_3 \\ -1+\sigma_3 \end{pmatrix}\phi_s$$

$$=0$$

$$\bar{v}(\bar{\nu}_\mu,\ s')\gamma_1(1-\gamma_5)u(\mu^-,\ s)=-E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\gamma^0\gamma^1(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}\phi_s$$

$$=-E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix} -\sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}\phi_s$$

$$=-E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix} -\sigma_1-\mathrm{i}\sigma_2 \\ \sigma_1+\mathrm{i}\sigma_2 \end{pmatrix}\phi_s=-2E\chi_{s'}^\dagger(\sigma_1+\mathrm{i}\sigma_2)\phi_s$$

$$\bar{v}(\bar{\nu}_\mu,\ s')\gamma_2(1-\gamma_5)u(\mu^-,\ s)=-E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\gamma^0\gamma^2(1-\gamma_5)\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3\end{pmatrix}\phi_s$$

$$=-E\chi_s^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix}-\sigma_2 & \sigma_2\\ \sigma_2 & -\sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3\end{pmatrix}\phi_s=-E\chi_s^\dagger(-\sigma_3,\ 1)$$

$$=-E\chi_s^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix}-\sigma_2 & +\mathrm{i}\sigma_1\\ \sigma_2 & -\mathrm{i}\sigma_1\end{pmatrix}\phi_s$$

$$=2\mathrm{i}E\chi_s^\dagger(\sigma_1+\mathrm{i}\sigma_2)\phi_s$$

$$\bar{v}(\bar{\nu}_\mu,\ s')\gamma_3(1-\gamma_5)u(\mu^-,\ s)=-E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\gamma^0\gamma^3(1-\gamma_5)\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3\end{pmatrix}\phi_s$$

$$=-E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix}-\sigma_3 & \sigma_3\\ \sigma_3 & -\sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3\end{pmatrix}\phi_s$$

$$=-E\chi_{s'}^\dagger(-\sigma_3,\ 1)\begin{pmatrix}-\sigma_3 & +1\\ \sigma_3 & -1\end{pmatrix}\phi_s=0$$

したがって $\mu=1,\ 2$ の場合にのみ電子カレントの振幅を考慮すればよい．

e^- 粒子の運動量の方向は $\hat{\boldsymbol{p}}=(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, $\bar{\nu}_e$“粒子”の方向は $\hat{\boldsymbol{p}}=(-\sin\theta,\ 0,\ -\cos\theta)$ であるから

$$u(e^-)=\sqrt{E}\begin{pmatrix}1\\ \sin\theta\sigma_1+\cos\theta\sigma_3\end{pmatrix}\phi_s$$

$$v(\bar{\nu}_e)=\sqrt{E}\begin{pmatrix}-\sin\theta\cdot\sigma_1-\cos\theta\cdot\sigma_3\\ 1\end{pmatrix}\chi_s$$

$\mu=1,\ 2$ の振幅は

$$\bar{u}(e^-,\ s')\gamma^1(1-\gamma_5)v(\bar{\nu}_e,\ s)$$

$$=E\phi_{s'}^\dagger(1,\ \sin\theta\sigma_1+\cos\theta\sigma_3)\gamma^0\gamma^1(1-\gamma_5)\begin{pmatrix}-\sin\theta\sigma_1-\cos\theta\sigma_3\\ 1\end{pmatrix}\chi_s$$

$$=E\phi_{s'}^\dagger(1,\ \sin\theta\sigma_1+\cos\theta\sigma_3)\begin{pmatrix}-\sigma_1 & \sigma_1\\ \sigma_1 & -\sigma_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\theta\sigma_1-\cos\theta\sigma_3\\ 1\end{pmatrix}\chi_s$$

$$=2E\cos\theta\phi_{s'}^\dagger(\cos\theta\cdot\sigma_1-\mathrm{i}\sigma_2-\sin\theta\cdot\sigma_3)\chi_s$$

$$\bar{u}(e^-,\ s')\gamma^2(1-\gamma_5)v(\bar{\nu}_e,\ s)$$

$$=E\phi_{s'}^\dagger(1,\ \sin\theta\cdot\sigma_1+\cos\theta\cdot\sigma_3)\gamma^0\gamma^2(1-\gamma_5)\times$$

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta\cdot\sigma_1-\cos\theta\cdot\sigma_3 \\ 1 \end{pmatrix}\chi_s$$

$$=E\phi_{s'}^{\dagger}(1,\ \sin\theta\cdot\sigma_1+\cos\theta\cdot\sigma_3)\begin{pmatrix} -\sigma_2 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & -\sigma_2 \end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta\cdot\sigma_1-\cos\theta\cdot\sigma_3 \\ 1 \end{pmatrix}\chi_s$$

$$=2\mathrm{i}E\phi_{s'}^{\dagger}(\cos\theta\cdot\sigma_1-\mathrm{i}\sigma_2-\sin\theta\cdot\sigma_3)\chi_s$$

したがってミューオン部分と電子部分のカレントの積として振幅は

$$-4G_{\mathrm{F}}E^2(1+\cos\theta)[\chi_{s'}^{\dagger}(\sigma_1+\mathrm{i}\sigma_2)\phi_s][\phi_{s'}^{\dagger}(\cos\theta\cdot\sigma_1-\mathrm{i}\sigma_2-\sin\theta\cdot\sigma_3)\chi_s]$$

である．

蛇足であるが，振幅の2乗を求めスピン状態について足してみよう．ミューオンの世界と電子の世界は独立で別個にスピノール積が計算できる．χ, ϕ, σ などの2次元行列が数行列としてあからさまに与えられているから，スピン指標を指定したとき，次の結果を容易に検証することができる．

ミューオン部分：$[\chi_{s'}^{\dagger}(\sigma_1+\mathrm{i}\sigma_2)\phi_s]$ は $s'=s=2$ のときのみ値1を持ち，その他の場合は0である．

電子部分：

$[\phi_{s'}^{\dagger}\sigma_1\chi_s]$

s' \ s	1	2
1	1	0
2	0	1

$\mathrm{i}[\phi_{s'}^{\dagger}\sigma_2\chi_s]$

s' \ s	1	2
1	1	0
2	0	−1

$[\phi_{s'}^{\dagger}\sigma_3\chi_s]$

s' \ s	1	2
1	0	1
2	−1	0

これから $[\phi_{s'}^{\dagger}(\cos\theta\cdot\sigma_1-\mathrm{i}\sigma_2-\sin\theta\cdot\sigma_3)\chi_{s'}]^2$ の値を計算すると次の表を得る．

s' \ s	1	2
1	$(1-\cos\theta)^2$	$\sin^2\theta$
2	$\sin^2\theta$	$(1+\cos\theta)^2$

したがってあらゆるスピン指標の組み合わせについて $[\cdots\cdots]^2$ の和をとると，θ を含まない定数4となる．

行列要素の本来の意味は，スピン指標を指定してこういう計算を行え，ということであった．スピンについての和を射影演算子と対角和で計算するいわゆる Casimir の方法が，いかにすぐれた省力法であるかがわかる．

(b′)　(a)で得られた u はエネルギー $H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}$ の固有解ではあるがヘリシティー$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})$の固有解ではない．左回りの粒子解をとり出す演算子 $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ をかけると，エネルギーについてもヘリシティーについても固有状態である解

$$u(\boldsymbol{p},\ \mathrm{L})=\sqrt{E}\begin{pmatrix}0\\ \phi_-(\hat{\boldsymbol{p}})\end{pmatrix},\quad E=|\boldsymbol{p}|$$

が得られる．同様に正ヘリシティーの解は $u(\boldsymbol{p},\ \mathrm{R})=\sqrt{E}\begin{pmatrix}\phi+(\hat{\boldsymbol{p}})\\0\end{pmatrix}$ である．運動量とヘリシティーを指定した反粒子解 $v(\boldsymbol{p}',\ \mathrm{R})$ は，次のようにして得られる．

“粒子”として持つ物理的な運動量，エネルギーを $\boldsymbol{p}'$，$E(\boldsymbol{p}')=|\boldsymbol{p}'|$ とすれば，これはあたかも運動量 $\boldsymbol{p}'$，エネルギー $-E(\boldsymbol{p}')$ を持つ粒子のようにふるまうから

$$(-\gamma^0E(\boldsymbol{p}')+\gamma^i\boldsymbol{p}'_i)v(\boldsymbol{p}')=0$$

である．一方粒子解（正エネルギー解）は

$$(\gamma^0E(\boldsymbol{p})+\gamma^i\boldsymbol{p}_i)u(\boldsymbol{p})=0$$

を満たすから，この複素共役をとれば

$$((\gamma^0)^*E(\boldsymbol{p})+(\gamma^i)^*\boldsymbol{p}_i)u^*(\boldsymbol{p})=0$$

γ 行列の表示より

$$(\gamma^0)^*=\beta^*=\beta=\gamma^0$$

$$(\gamma^i)^*=(\beta\alpha_i)^*=\beta(\alpha_i)^*=\beta(\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \alpha_3)$$

$$\therefore\quad \gamma^2(\gamma^0)^*\gamma^2=\beta\alpha_2\beta\beta\alpha_2=\beta(\alpha_2)^2=\beta=\gamma^0$$

$$\gamma^2(\gamma_i)^*\gamma^2=\beta\alpha_2\beta(\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \alpha_3)\beta\alpha_2=\beta\alpha_i=\gamma^i$$

したがって

$$\gamma^2((\gamma_0)^*E(\boldsymbol{p})+(\gamma^i)^*\boldsymbol{p}_i)\gamma^2\gamma^2u^*(\boldsymbol{p})=0$$

$$(\gamma^0 E(\boldsymbol{p})+\gamma^i \boldsymbol{p}_i)\gamma^2 u^*(\boldsymbol{p})=0$$

$\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ とおきかえると

$$(-\gamma^0 E(-\boldsymbol{p})+\gamma^i \boldsymbol{p}_i)\gamma^2 u^*(-\boldsymbol{p})=0$$

すなわち

$$v(\boldsymbol{p}')=\gamma^2 u^*(-\boldsymbol{p}')$$

ととることができる．この状態はまた反粒子のヘリシティーの固有状態であることが次のようにしてわかる．粒子解のヘリシティーの正負を $u_\pm$ で表せば

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})u_\pm(\boldsymbol{p})=\pm u_\pm(\boldsymbol{p})$$

である．この複素共役をとり $(\gamma^2)^2=-1$，$\gamma_5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma_5$ に注意すれば

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^* u_\pm^*(\boldsymbol{p})=\pm u_\pm^*(\boldsymbol{p})$$

$$-\gamma^2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^*\gamma^2\gamma^2 u_\pm^*(\boldsymbol{p})=\pm\gamma^2 u_\pm^*(\boldsymbol{p})$$

$$\gamma^2(\sigma_i)^*\gamma^2=\gamma^2(\alpha_i\gamma_5)^*\gamma^2=\gamma^2(\gamma^0\gamma^i\gamma_5)^*\gamma^2$$

$$=\gamma^2(\gamma^0)^*\gamma^2\gamma^2(\gamma^i)^*\gamma^2\gamma^2\gamma_5\gamma^2=\gamma^0\gamma^i\gamma_5=\sigma_i$$

$$\therefore\quad -(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^*\gamma^2 u_\pm^*(\boldsymbol{p})=\pm\gamma^2 u_\pm^*(\boldsymbol{p})$$

すなわち

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}')\gamma^2 u_\pm^*(-\boldsymbol{p}')=\pm\gamma^2 u_\pm^*(-\boldsymbol{p}')$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}')v_\pm(\boldsymbol{p}')=\pm v_\pm(\boldsymbol{p}')$$

である．したがって右回りの反粒子状態は $(E'=|\boldsymbol{p}'|)$

$$v(\boldsymbol{p}',\ \mathrm{R})=\gamma^2 u_+^*(-\boldsymbol{p}')=\sqrt{E'}\,\gamma^2\begin{pmatrix}\phi_+(-\hat{\boldsymbol{p}}')\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\bar{v}(\boldsymbol{p}',\ \mathrm{R})=(v_+(\boldsymbol{p}',\ \mathrm{R}))^\dagger\gamma^0=\sqrt{E'}(\phi_+^\dagger(-\hat{\boldsymbol{p}}'),\ 0)\gamma^2\gamma^0$$

で表される．運動量の向きを変える $(\boldsymbol{p}'\to-\boldsymbol{p}')$ ことは，$\theta\to\theta+\pi$ と変えることであるから

$$\phi_+(-\hat{\boldsymbol{p}}')=\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}=-\phi_-(\hat{\boldsymbol{p}}')$$

すなわち

$$\bar{v}(\boldsymbol{p}',\ \mathrm{R})=\sqrt{E'}(-\phi_-(\hat{\boldsymbol{p}}'),\ 0)\gamma^2\gamma^0$$

と書くことができる．$\boldsymbol{p}'$ は物理的“粒子”としての 3 元運動量であり，ϕ_+，ϕ_-

は（a）に与えられている“関数形”である．

これだけ準備をして，さて反応 $\mu^- + \bar{\nu}_\mu \to e^- + \bar{\nu}_e$ の振幅を考える．因子 $(1-\gamma_5)$ はヘリシティーを指定する以上係数 2 を与えるにすぎないからしばらく省略する．ミューオン部分の振幅は重心系で

$$\bar{v}(E,\ \hat{\boldsymbol{p}}_\nu=(0,\ 0,\ -1),\ \mathrm{R})\gamma_\mu u(E,\ \hat{\boldsymbol{p}}_\mu=(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{L})$$

であるから，あからさまに状態を書けば

$$u(E,\ \hat{\boldsymbol{p}}_\mu,\ \mathrm{L})=\sqrt{E}\begin{pmatrix}0\\ \phi_-(0)\end{pmatrix},\quad \phi_-(0)=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\equiv\phi$$

$$\bar{v}(E,\ \hat{\boldsymbol{p}}_\nu,\ \mathrm{L})=\sqrt{E}(-\phi_-^\dagger(\pi),\ 0)\gamma^2\gamma^0,\quad \phi_-(\pi)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\equiv\phi'$$

$$\gamma_\mu=(\gamma^0,\ -\gamma^i)$$

$$\gamma^0=\beta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^i=\beta\alpha_i=\begin{pmatrix}0 & -\sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix}$$

順次振幅を計算する．規格化 E を別にして

$$\mu=0：\ \bar{v}\gamma^0 u=(-\phi'^\dagger,\ 0)\gamma^2\gamma^0\gamma^0\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}=(-\phi'^\dagger,\ 0)\begin{pmatrix}0 & -\sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}$$

$$=(-\phi'^\dagger,\ 0)\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma}_2\phi\\ 0\end{pmatrix}=\phi'^\dagger\sigma_2\phi$$

$$=(1,\ 0)\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\mathrm{i}=\bar{v}\gamma_0 u$$

$$\mu=1：\ \bar{v}\gamma^1 u=(-\phi'^\dagger,\ 0)\gamma^2\gamma^0\gamma^1\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}=(-\phi'^\dagger,\ 0)\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\sigma_3\\ \mathrm{i}\sigma_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}$$

$$=-\mathrm{i}\phi'^\dagger\sigma_3\phi=-\mathrm{i}(1,\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=0$$

$$\mu=2：\ \bar{v}\gamma^2 u=(-\phi'^\dagger,\ 0)\gamma^2\gamma^0\gamma^2\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}=(-\phi'^\dagger,\ 0)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}$$

$$=-\phi'^\dagger\phi=-(1,\ 0)\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=0$$

$$\mu=3：\ \bar{v}\gamma^3 u$$

$$=(-\phi'^\dagger,\ 0)\gamma^2\gamma^0\gamma^3\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}=(-\phi'^\dagger,\ 0)\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\sigma_1\\ \mathrm{i}\sigma_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix}$$

$$=-\mathrm{i}\phi'^{\dagger}\sigma_1\phi=-\mathrm{i}(1,\ 0)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\mathrm{i}=-\bar{v}\gamma_3 u$$

これから電子部分の振幅

$$\bar{u}(E,\ \hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}}=(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta),\ \mathrm{L})\gamma^{\mu}v(E,\ \hat{\boldsymbol{p}}_{\nu}=(-\sin\theta,\ 0,\ -\cos\theta),\ \mathrm{R})$$

は $\mu=0,\ 3$ についてのみ計算すればよい.

$$v(E,\ \hat{\boldsymbol{p}}_{\nu},\ \mathrm{R})=\sqrt{E}\gamma^2\begin{pmatrix}-\phi_-(\pi+\theta)\\ 0\end{pmatrix},\quad \phi_-(\pi+\theta)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\equiv\phi$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{E},\ \hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{e}},\ \mathrm{L})=\sqrt{E}(0,\ \phi_-^{\dagger}(\theta))\gamma^0,\quad \phi_-(\theta)=\begin{pmatrix}\sin\dfrac{\theta}{2}\\ -\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\equiv\phi'$$

$$\mu=0:\ \bar{u}\gamma^0 v=(0,\ \phi'^{\dagger})\gamma^0\gamma^0\gamma^2\begin{pmatrix}-\phi\\ 0\end{pmatrix}=(0,\ \phi'^{\dagger})\begin{pmatrix}0 & -\sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=(0,\ \phi'^{\dagger})\begin{pmatrix}0\\ -\sigma_2\phi\end{pmatrix}=-\phi'^{\dagger}\sigma_2\phi$$

$$=-\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\cos\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}=-\mathrm{i}$$

$$\mu=3:\ \bar{u}\gamma^3 v=(0,\ \phi'^{\dagger})\gamma^0\gamma^3\gamma^2\begin{pmatrix}-\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=(0,\ \phi'^{\dagger})\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\sigma_1\\ \mathrm{i}\sigma_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\phi\\ 0\end{pmatrix}=-\mathrm{i}\phi'^{\dagger}\sigma_1\phi$$

$$=-\mathrm{i}\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\cos\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}=-\mathrm{i}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

したがってミューオン部分と電子部分の振幅を乗ずると, $(1-\gamma_5)$ からくる因子 2 と規格化 E を補って

$$4G_{\mathrm{F}}E^2\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)=4G_{\mathrm{F}}E^2(1+\cos\theta)$$

である．

12.2　式(12.35)

$$\sum|M_{00}|^2=\frac{g^4}{M^4(p_1-k_1)^4}\mathrm{Tr}\left[\not{k}_2(1-\gamma_5)(\not{p}_1-\not{k}_1)\not{k}_1\not{p}_1\not{k}_1(\not{p}_1-\not{k}_1)\not{k}_2\not{p}_2\right]$$

を計算する．p_1，p_2 は入射ニュートリノ，反ニュートリノの 4 元運動量，k_1，k_2 は射出 W 粒子の 4 元運動量であるから

$$p_1^2=p_2^2=0,\quad k_1^2=k_2^2=M^2$$

$$p_1+p_2=k_1+k_2$$

が成り立つ．因子 $(1-\gamma_5)$ を先頭に出してから対角和の性質によって最後に追いやり，$\not{p}_1\not{p}_1=p_1^2=0$ を用いて中央の因子 $\not{k}_1\not{p}_1\not{k}_1$ を書き換えると

$$\not{k}_1\not{p}_1\not{k}_1=(\not{k}_1-\not{p}_1)\not{p}_1\not{k}_1=(\not{k}_1-\not{p}_1)\not{p}_1(\not{k}_1-\not{p}_1)$$

$$\therefore\quad \mathrm{Tr}[\cdots\cdots]=\mathrm{Tr}\left[\not{k}_2(\not{p}_1-\not{k}_1)(\not{k}_1-\not{p}_1)\not{p}_1(\not{k}_1-\not{p}_1)(\not{p}_1-\not{k}_1)\not{k}_2\not{p}_2(1-\gamma_5)\right]$$

明らかに（式(D.6) 参照）

$$(\not{p}_1-\not{k}_1)(\not{p}_1-\not{k}_1)=(p_1-k_1)^2$$

だから

$$\mathrm{Tr}[\cdots\cdots]=(p_1-k_1)^4\,\mathrm{Tr}\left[\not{k}_2\not{p}_1\not{k}_2\not{p}_2(1-\gamma_5)\right]$$

γ_5 を含む対角和は 0 である．式(D.37)の右辺でどれか 2 つの擬標に対して対称な項と反対称な項の積の縮約になっているからである．4 個の γ 積に対して式(D.31) 応用すれば

$$\mathrm{Tr}\left[\not{k}_2\not{p}_1\not{k}_2\not{p}_2\right]=4\left[(k_2\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)+(k_2\cdot p_2)(p_1\cdot k_2)-M^2(p_1\cdot p_2)\right]$$

したがって運動量（エネルギー）の最高次の項のみ保存すれば

$$\sum|M_{00}|^2\sim\frac{g^4}{M^4}(p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_2)$$

重心系のエネルギーを E，入射するニュートリノの 3 元運動量を $\boldsymbol{p}$，射出する W 粒子の 3 元運動量を $\boldsymbol{k}$ とすれば

$$p_1=\left(\frac{E}{2},\ \boldsymbol{p}\right),\quad p_2=\left(\frac{E}{2},\ -\boldsymbol{p}\right)$$

$$k_1=\left(\frac{E}{2},\ \boldsymbol{k}\right),\quad k_2=\left(\frac{E}{2},\ -\boldsymbol{k}\right)$$

$$E=2|\boldsymbol{p}|=2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{M}^2},\quad \theta=\angle(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{k})$$

であるから

$$(p_1,\ k_2)=\frac{E^2}{4}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{E^2}{4}+\frac{E}{2}\cdot\sqrt{\frac{E^2}{4}-M^2}\cos\theta\sim\frac{E^2}{4}(1+\cos\theta)$$

$$(p_2\cdot k_2)=\frac{E^2}{4}-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{E^2}{4}-\frac{E}{2}\cdot\sqrt{\frac{E^2}{4}-M^2}\cos\theta\sim\frac{E^2}{4}(1-\cos\theta)$$

12.3 式(12.21)の左辺は明らかに指標 μ, ν をもつテンソルであるからその一般形を

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\nu^*(k,\ \lambda)=\mathrm{A}g_{\mu\nu}+\mathrm{B}k_\mu k_\nu$$

とおく．この式に k^μ を乗じ μ について和をとると式(12.25)より左辺は 0 である．右辺は

$$0=\mathrm{A}k_\nu+\mathrm{B}k^2\cdot k_\nu=(\mathrm{A}+\mathrm{B}k^2)k_\nu=(\mathrm{A}+\mathrm{B}M^2)k_\nu$$

$$\therefore\quad \mathrm{A}+\mathrm{B}M^2=0$$

また $g^{\mu\nu}$ をかけ μ, ν について和をとると

$$\sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\mu{}^*(k,\ \lambda)=4\mathrm{A}+\mathrm{B}M^2$$

左辺を式(12.32)(および式(12.27), (12.28)) と式(12.33) を用いてあからさまに計算する．

$$\begin{cases}\varepsilon^\mu(k,\ \lambda=\pm1)=\varepsilon^\mu(k_{\mathrm{rest}},\ \lambda=\pm1)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad =\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ \pm i,\ 0)\\ \varepsilon^\mu(k,\ \lambda=0)=\dfrac{1}{M}(|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ k^0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_\nu{}^*(k,\ \lambda=\pm1)=g_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu *}(k,\ \lambda=\pm1)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad =\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ \pm i,\ 0)\\ \varepsilon_\nu{}^*(k,\ \lambda=0)=\dfrac{1}{M}(|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ -k^0)\end{cases}$$

$$\sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)$$

$$= -\frac{1}{2}(0,\ 1,\ i,\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\i\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(0,\ 1,\ -i,\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\-i\\0\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{M^2}(|\boldsymbol{k}|,\ 0,\ 0,\ k_0)\begin{pmatrix}|\boldsymbol{k}|\\0\\0\\-k^0\end{pmatrix}$$

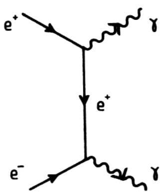
$$= -1-1+\frac{|\boldsymbol{k}|^2-(k^0)^2}{M^2} = -3$$

したがって $A+BM^2=0$, $4A+BM^2=-3$ より $A=-1$, $B=\frac{1}{M^2}$

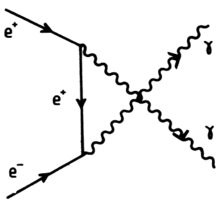
12.4 図 12.5 (a), (b) を再録しその振幅の和を書き下すと自明な係数を別として

$$\varepsilon_\mu{}^*(k_1,\ \lambda_1)\varepsilon_\nu{}^*(k_2,\ \lambda_2)\left(\bar{v}(p_2)\gamma^\nu\cdot\frac{(\not{p}_1-\not{k}_1)+m}{(p_1-k_1)^2-m^2}\cdot\gamma^\mu u(p_1)+\bar{v}(p_2)\gamma^\mu\cdot\frac{(\not{p}_1-\not{k}_2)+m}{(p_1-k_2)^2-m^2}\cdot\gamma^\nu u(p_1)\right)$$

である. 外線に W 粒子を含む過程 $e^-e^+ \to W^+W^-$ の計算の模倣をこの振幅を用いて行うとすれば, 高エネルギー特性の主要部分は ε を対応する k でおきかえて得られる. $\varepsilon_\mu(k_1,\ \lambda_1) \to k_{1\mu}$, $\varepsilon_\nu(k_2,\ \lambda_2) \to k_{2\nu}$



(a)



(b)

前者のおきかえにより振幅の第1項は

$$\bar{v}(p_2)\not{\varepsilon}_2(k_2,\ \lambda_2)\cdot\frac{\not{p}_1-\not{k}_1+m}{(p_1-k_1)^2-m^2}\cdot\not{k}_1 u(p_1)$$

となる．Dirac 方程式 $(\not{p}_1-m)u(p_1)=0$ および光子質量が 0 である条件 $k_1{}^2=0$ より

$$(\not{p}_1-\not{k}_1+m)\not{k}_1 u(p_1)=((2k_1\cdot p_1)-\not{k}_1\not{p}_1-k_1{}^2+m\not{k}_1)u(p_1)$$
$$=2(k_1\cdot p_1)u(p_1)$$

また分母は $(p_1-k_1)^2-m^2=-2(p_1\cdot k_1)$ であるから振幅の第 1 項は $-\bar{v}_2(p_2)\not{\varepsilon}_2 u(p_1)$ となる．

同じおきかえにより振幅の第2項は $p_1-k_2=k_1-p_2$ とおきかえ

$$\bar{v}_2(p_2)k_1\cdot\frac{\not{k}_1-p_2+m}{(k_1-p_2)^2-m^2}\cdot\varepsilon_2(k_2,\ \lambda_2)u(p_1)$$

となるが，

$$\bar{v}_2(p_2)\not{k}_1(\not{k}_1-p_2+m)=\bar{v}_2(p_2)(k_1{}^2-2(k_1\cdot p_2)+\not{p}_2\not{k}_1+m\not{k}_1)$$
$$=-2(k_1\cdot p_2)\,\bar{v}_2(p)$$

$$(k_1-p_2)^2-m^2=-2(k_1\cdot p_2)$$

より $\bar{v}_2(p_2)\not{\varepsilon}_2 u(p_1)$ となる．したがって振幅の和は 0 である．同様におきかえ $\varepsilon_\nu(k_2,\ \lambda_2)\ \rightarrow\ k_{2v}$ によっても振幅の和は 0 である．

《13 章》

13.1　式(13.81)

$$\Box\hat{A}^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu\hat{A}^\mu)=\mathrm{i}q[\hat{\phi}^\dagger(\partial^\nu\hat{\phi})-(\partial^\nu\hat{\phi}^\dagger)\hat{\phi}]-2q^2\hat{A}^\nu|\hat{\phi}|^2$$

の右辺を式(13.80)

$$\hat{\phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[f+\hat{\chi}_1(x)+\mathrm{i}\,\hat{\chi}_2(x)]$$

から計算する．f，$\hat{\chi}_1$，$\hat{\chi}_2$ はいずれも実数で，f は変数 x によらない．

$$\hat{\phi}^*(\partial^\nu\phi)-(\partial^\nu\hat{\phi})^*\hat{\phi}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,[\hat{\phi}^*(\partial^\nu\hat{\phi})]$$
$$=\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,[(f+\hat{\chi}_1-\mathrm{i}\hat{\chi}_2)(\partial^\nu\hat{\chi}_1+\mathrm{i}\partial^\nu\hat{\chi}_2)]$$
$$=\mathrm{i}\,[(f+\hat{\chi}_1)\partial^\nu\hat{\chi}_2-\hat{\chi}_2\partial^\nu\hat{\chi}_1]$$

$$2|\hat{\phi}|^2=(f+\hat{\chi}_1-\mathrm{i}\,\hat{\chi}_2)(f+\hat{\chi}_1+\mathrm{i}\,\hat{\chi}_2)=(f+\hat{\chi}_1)^2+\hat{\chi}_2{}^2$$
$$=f^2+(\hat{\chi}_1{}^2+2f\hat{\chi}_1+\hat{\chi}_2{}^2)$$

したがって式(13.81) の右辺は，$M=qf$ とおいて

$$-qf\partial^\nu\hat{\chi}_2+q(\hat{\chi}_2\partial^\nu\hat{\chi}_1-\hat{\chi}_1\partial^\nu\hat{\chi}_2)-q^2f^2\hat{A}^\nu-q^2\hat{A}^\nu(\hat{\chi}_1{}^2+2f\hat{\chi}_1+\hat{\chi}_2{}^2)$$
$$=-M^2\hat{A}^\nu-M\partial^\nu\hat{\chi}_2+q(\hat{\chi}_2\partial^\nu\hat{\chi}_1-\hat{\chi}_1\partial^\nu\hat{\chi}_2)-q^2\hat{A}^\nu(\hat{\chi}_1{}^2+2f\hat{\chi}_1+\hat{\chi}_2{}^2)$$

となり，式(13.82) が導かれる．

13.2 $A^\mu\sim e^{ikx}$ とおいて所与の微分演算子を運動量空間の代数演算子に (Fourier) 変換すれば

$$(\Box+M^2)g^{\nu\mu}-(1-\xi^{-1})\partial^\nu\partial^\mu \;\rightarrow\; (-k^2+M^2)g^{\nu\mu}+(1-\xi^{-1})k^\nu k^\mu$$

である．逆演算子を求めるには問題 10.1 と同じ手続きをふめばよい．求める逆演算子を $Ag^{\mu\nu}+Bk^\mu k^\nu$ と書けば

$$[(-k^2+M^2)g_{\lambda\mu}+(1-\xi^{-1})k_\lambda k_\mu(Ag^{\mu\nu}+Bk^\mu k^\nu)=\delta_\lambda{}^\nu$$

が成り立つ．左辺を展開したとき

A の係数：$(-k^2+M^2)\delta_\lambda{}^\nu+(1-\xi^{-1})k_\lambda k^\nu$

B の係数：$(-k^2+M^2)k_\lambda k^\nu+(1-\xi^{-1})k^2k_\lambda k^\nu$

であるから，右辺と比較して

$$(-k^2+M^2)A=1$$
$$(1-\xi^{-1})A+[(-k^2+M^2)+(1-\xi^{-1})k^2]B=0$$
$$\therefore\quad A=-(k^2-M^2)^{-1}$$
$$B=\frac{(1-\xi^{-1})}{(-k^2-M^2)+(1-\xi^{-1})k^2}\cdot(k^2-M^2)^{-1}$$
$$=\frac{1-\xi}{k^2-\xi M^2}\cdot(k^2-M^2)^{-1}$$
$$\therefore\quad Ag^{\mu\nu}+Bk^\mu k^\nu=\left[-g^{\mu\nu}+\frac{(1-\xi)k^\mu k^\nu}{k^2-\xi M^2}\right](k^2-M^2)^{-1}$$

《14 章》

14.1 荷電 W 粒子の崩壊 $W^-\rightarrow e^-+\bar{\nu}_e$ の不変振幅 F は，付録 F.3.3 より

$$F=-\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\cdot\bar{u}(k_1)\gamma_\mu\cdot\frac{1-\gamma_5}{2}v(k_2)\cdot\varepsilon^\mu(p)$$

である．p，k_1，k_2 はそれぞれ W$^-$ 粒子，電子，反ニュートリノの 4 元運動量，$p=k_1+k_2$ である．

$$|F|^2=\frac{g^2}{8}[\bar{u}(k_1)\not{\varepsilon}(1-\gamma_5)v(k_2)]^\dagger[\bar{u}(k_1)\not{\varepsilon}(1-\gamma_5)v(k_2)]$$

$$=\frac{g^2}{8}[\bar{v}(k_2)\gamma^0(1-\gamma_5)\not{\varepsilon}^*\gamma^0u(k_1)\bar{u}(k_1)\not{\varepsilon}(1-\gamma_5)v(k_2)]$$

レプトンのスピンについて総和をすれば m を電子の質量として

$$|F|^2=\frac{g^2}{8}\,\mathrm{Tr}\,[\gamma^0(1-\gamma_5)\not{\varepsilon}^*\gamma^0(k_1+m)\not{\varepsilon}(1-\gamma_5)k_2]$$

先頭を $\gamma^0(1-\gamma_5)=(1+\gamma_5)\gamma^0$ と書き直して $(1+\gamma_5)$ を最後にまわせば（式(D.18) 参照）

$$|F|^2=\frac{g^2}{4}\,\mathrm{Tr}\,[\not{\varepsilon}^*(\not{k}_1+m)\not{\varepsilon}\not{k}_2(1+\gamma_5)]$$

$$=\frac{g^2}{4}\,\mathrm{Tr}\,[\not{\varepsilon}^*\not{k}_1\not{\varepsilon}\not{k}_2(1+\gamma_5)]$$

$$=g^2[(\varepsilon^*\cdot k_1)(\varepsilon\cdot k_2)+(\varepsilon^*\cdot k_2)(\varepsilon\cdot k_1)-(\varepsilon^*\cdot\varepsilon)(k_1\cdot k_2)$$
$$+\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\lambda}\varepsilon^{\alpha *}k_1{}^\beta\varepsilon^\rho k_2{}^\lambda]$$

さらに W 粒子のスピンについて和をとれば，式(12.21) より

$$\sum\varepsilon^\mu(p)\varepsilon^{\nu *}(p)=-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{M^2}$$

であるから（M は W 粒子の質量）

$$\sum(\varepsilon^*\cdot k_1)(\varepsilon\cdot k_2)=\sum g_{\mu\alpha}\varepsilon^{*\mu}k_1{}^\alpha g_{\nu\beta}\varepsilon^\nu k_2{}^\beta$$

$$=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{M^2}\right)k_1{}^\alpha k_2{}^\beta$$

$$=-(k_1\cdot k_2)+\frac{(p\cdot k_1)(p\cdot k_2)}{M^2}$$

$$\sum(\varepsilon^*\cdot\varepsilon)=\sum g_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu *}\varepsilon^\nu=g_{\mu\nu}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{M^2}\right)$$

$$=-4+\frac{p^2}{M^2}=-3$$

$$\sum\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon^{\alpha *}k_1{}^\beta\varepsilon^\rho k_2{}^\lambda=\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}k_1{}^\beta k_2{}^\lambda\left(-g^{\alpha\rho}+\frac{p^\alpha p^\rho}{M^2}\right)=0$$

したがって W 粒子のスピンについて平均 (1/3) し，レプトンのスピンについて

和をとった不変振幅の2乗は

$$|F|^2=\frac{1}{3}\cdot g^2\left[(k_1\cdot k_2)+\frac{2(p\cdot k_1)(p\cdot k_2)}{M^2}\right]$$

である．W粒子の静止系で $m=0$ と近似すれば

$$p=(M,\ 0),\quad k_1=(E,\ \boldsymbol{k}),\quad k_2=(E,\ -\boldsymbol{k})$$

$$M=2E=2|\boldsymbol{k}|$$

$$\therefore\quad (k_1\cdot k_2)=E^2+|\boldsymbol{k}|^2=\frac{M^2}{2},\quad (p\cdot k_1)=(p\cdot k_2)=ME=\frac{M^2}{2}$$

$$\therefore\quad |F|^2=\frac{1}{3}g^2M^2$$

静止系の2体崩壊ではこの近似($m=0$)で

$$\mathrm{dLips}=(2\pi)^4\delta(p-k_1-k_2)\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_1}{2E_1}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{2E_2}$$

$$\rightarrow\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot\delta(M-2|\boldsymbol{k}|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot\delta(M-2k)\cdot 4\pi k^2\mathrm{d}k=\frac{1}{4\pi}\delta(M-2k)\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{8\pi}\delta\left(k-\frac{M}{2}\right)\mathrm{d}k$$

ただし $k=|\boldsymbol{k}|$ である．したがって崩壊率は（式(F.1.b) 参照）

$$\Gamma=\frac{1}{2M}\cdot\frac{1}{3}g^2M^2\cdot\frac{1}{8\pi}=\frac{1}{12}\cdot\frac{g^2}{4\pi}\cdot M$$

式(10.93) より $g^2=4\sqrt{2}G_\mathrm{F}M^2$ であるから

$$\Gamma=\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{M^3}{6\pi}$$

また式(14.76) より $G_\mathrm{F}M^2=\pi\alpha/\sqrt{2}\sin^2\theta_\mathrm{W}$ だから

$$\Gamma=\frac{\alpha}{12}\cdot\frac{M}{\sin^2\theta_\mathrm{W}}=6.08\times10^{-4}\times\frac{M}{\sin^2\theta_\mathrm{W}}$$

再び式(14.76) の数値を用いて

$$\Gamma=6.08\times10^{-4}\times\frac{37.28}{\sin^3\theta_\mathrm{W}}\,\mathrm{GeV}=\frac{22.7}{\sin^3\theta_\mathrm{W}}\,\mathrm{MeV}$$

14.2 （a） 式(14.38) は弱いSU(2) カレント

$$\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})=\mathrm{i}g[\hat{\phi}^\dagger T^a(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger T^a\hat{\phi}]$$

を，式(14.37) は弱いハイパー荷のカレント

$$\hat{j}_y^\mu(\hat{\phi})=\mathrm{i}\frac{g'}{2}\cdot y[\hat{\phi}^\dagger(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\hat{\phi}]$$

を与えている．T^a は $t=1$ (3 次元) の生成演算子の行列で，角運動量の代数から得られたもの．

$$T^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ T^2=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\ T^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

これらのカレントが局所的 SU(2)×U(1) 位相変換に対して不変であるためには ∂^μ を共変微分(14.40)

$$\partial^\mu\ \rightarrow\ \hat{D}^\mu=\partial^\mu+\mathrm{i}g\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{W}}^\mu+\mathrm{i}\cdot\frac{g'}{2}y\hat{B}^\mu$$

でおきかえなくてはならない．修正されたカレントは

$$\begin{aligned}\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})=&\mathrm{i}g[\hat{\phi}^\dagger T^a(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger T^a\hat{\phi}]\\&-g^2\hat{\phi}^\dagger(T^aT^b+T^bT^a)\hat{\phi}\hat{W}^{b\mu}-gg'y\hat{\phi}^\dagger T^a\hat{\phi}\cdot\hat{B}^\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{j}_y^\mu(\hat{\phi})=&\mathrm{i}\cdot\frac{g'}{2}\cdot y[\hat{\phi}^\dagger(\partial^\mu\hat{\phi})-(\partial^\mu\hat{\phi})^\dagger\hat{\phi}]\\&=-gg'y\hat{\phi}^\dagger T^b\hat{\phi}\cdot\hat{W}^{b\mu}-\frac{g'^2}{2}y^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}\hat{B}^\mu\end{aligned}$$

である（擬標 b について和をとる）．

さてここで $y=2$, $\langle\phi\rangle_0\equiv\phi_0=\begin{pmatrix}0\\0\\f\end{pmatrix}$ とおいて行列をあからさまに計算すれば

$$\hat{\phi}_0{}^\dagger T^1\hat{\phi}_0=0,\quad \hat{\phi}_0{}^\dagger T^2\hat{\phi}_0=0,\quad \hat{\phi}_0{}^\dagger T^3\hat{\phi}_0=-f^2$$

である．$\hat{\phi}_0{}^\dagger T^aT^b\hat{\phi}_0$ の中で 0 にならないものは積（T^aT^b）の 33 要素が 0 にならないものだけだから

$$\hat{\phi}_0{}^\dagger(T^1)^2\hat{\phi}_0=\frac{1}{2}f^2,\quad \hat{\phi}_0{}^\dagger(T^2)^2\hat{\phi}_0=\frac{1}{2}f^2,\quad \hat{\phi}_0{}^\dagger(T^3)^2\hat{\phi}_0=f^2$$

$$\hat{\phi}_0{}^\dagger(T^1T^2)\hat{\phi}_0=-\frac{\mathrm{i}}{2}f^2,\quad \hat{\phi}^\dagger(T^2T^1)\hat{\phi}_0=\frac{\mathrm{i}}{2}f^2$$

である．したがって

$$\hat{j}^{1\mu}(\hat{\phi}_0)=-g^2f^2\hat{W}^{1\mu}$$
$$\hat{j}^{2\mu}(\hat{\phi}_0)=-g^2f^2\hat{W}^{2\mu}$$
$$\hat{j}^{3\mu}(\hat{\phi}_0)=-2g^2f^2\hat{W}^{3\mu}+2gg'f^2\hat{B}^{\mu}$$
$$\hat{j}_y^{\mu}(\hat{\phi}_0)=+2gg'f^2\hat{W}^{3\mu}-2g'^2f^2\hat{B}^{\mu}$$

これから $M_W^2=g^2f^2$ であることがわかる．$\hat{W}^{3\mu}$ と $\hat{B}^{\mu}$ を対角化するには $g'\hat{j}^{3\mu}(\hat{\phi}_0)+g\hat{j}_y^{\mu}(\hat{\phi}_0)=0$ の関係から

$$\hat{A}^{\mu}=g'\hat{W}^{3\mu}+g\hat{B}^{\mu}\equiv\cos\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}+\sin\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}$$

とおけばよい．これに直交する成分は

$$\hat{Z}^{\mu}=\cos\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}-\sin\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}$$

で，パラメーター g，g' と θ_W の関係は式(14.63)と同じである．$\hat{A}^{\mu}$，$\hat{Z}^{\mu}$ が"真空"で満たす方程式は

$$\Box\hat{W}^{3\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{W}^{3\nu}=\hat{j}^{3\mu}(\hat{\phi}_0)$$
$$\Box\hat{B}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{B}^{\nu}=\hat{j}_y^{\mu}(\hat{\phi}_0)$$

より

$$\Box\hat{A}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{A}^{\mu}=0$$
$$\Box\hat{Z}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{Z}^{\nu}=\cos\theta_W\cdot\hat{j}^{3\mu}(\hat{\phi}_0)-\sin\theta_W\cdot\hat{j}_y^{\mu}(\hat{\phi}_0)$$

この右辺を計算するには $g'=g\tan\theta_W$ とおき

$$\begin{aligned}&-2g^2f^2(\cos\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}-\cos\theta_W\tan\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}\\&\quad+\sin\theta_W\tan\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}-\sin\theta_W\tan^2\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu})\\&=-2g^2f^2(\hat{Z}^{\mu}+\tan^2\theta_W\cdot\hat{Z}^{\mu})\\&=-2g^2f^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta_W}\cdot\hat{Z}^{\mu}\equiv-M_Z{}^2\hat{Z}^{\mu}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad M_Z{}^2=\frac{2g^2f^2}{\cos^2\theta_W}=\frac{2M_W^2}{\cos^2\theta_W}$$

これが求める結果である．

式(14.106) より

$$\rho=\frac{M_W^2}{M_Z^2\cos^2\theta_W}=\frac{1}{2}$$

（b） $y=0$，$\langle\hat{\phi}\rangle_0=\hat{\phi}_0=\begin{pmatrix}0\\f\\0\end{pmatrix}$ととるとき，$\hat{\phi}_0{}^{\dagger}T^a\hat{\phi}_0=0$ ($a=1$，2，3) であ

る．

$\hat{\phi}_0^\dagger T^a T^b \hat{\phi}_0$ のうち0にならないものは，積 $T^a T^b$ の22要素が0にならないものに限られ，

$$\hat{\phi}_0^\dagger (T^1)^2 \hat{\phi}_0 = \hat{\phi}_0^\dagger (T^2)^2 \hat{\phi}_0 = f^2$$

のほかにはない．したがって

$$\hat{j}^{1\mu}(\hat{\phi}_0) = -2g^2 f^2 \hat{W}^{1\mu}$$
$$\hat{j}^{2\mu}(\hat{\phi}_0) = -2g^2 f^2 \hat{W}^{2\mu}$$
$$\hat{j}^{3\mu}(\hat{\phi}_0) = j_y^\mu(\hat{\phi}_0) = 0$$

となり，$\hat{W}^{1\mu}$，$\hat{W}^{2\mu}$ 粒子のみが質量 $M_W^2 = 2g^2 f^2$ を得る．

14.3 Z^0 粒子が質量0のフェルミオン対 $f\bar{f}$ に崩壊する幅は式(14.108)で与えられる．f が e^-，ν，u，d である場合，C_L，C_R はそれぞれ式(14.96)，(14.97)，(14.98)にまとめられている．したがってそれぞれの場合について $|C_L^f|^2 + |C_R^f|^2$ を計算して比較すればよい．ただし，クォークについてはカラーの自由度を考慮して3倍しなくてはならない．

$$|C_L^e|^2 + |C_R^e|^2 = \left(-\frac{1}{2} + a\right)^2 + a^2 = \frac{1}{4}(1 - 4a + 8a^2)$$

$$|C_L^\nu|^2 + |C_R^\nu|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 = \frac{1}{4}$$

$$3(|C_L^u|^2 + |C_R^u|^2) = 3\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}a\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}a\right)^2\right] = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{8}{3}a + \frac{32}{9}a^2\right)$$

$$3(C_L^d|^2 + |C_R^d|^2) = 3\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2\right] = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{3}a + \frac{8}{9}a^2\right)$$

$$\therefore \quad \Gamma(Z^0 \to e\bar{e}) : \Gamma(Z^0 \to \nu\bar{\nu}) : \Gamma(Z^0 \to u\bar{u}) : \Gamma(Z^0 \to d\bar{d})$$
$$= (1 - 4a + 8a^2) : 1 : \left(3 - 8a + \frac{32}{3}a^2\right) : \left(3 - 4a + \frac{8}{3}a^2\right)$$

式(14.75) より $a = 0.226$，$a^2 = 0.051$ を用い上の比は 0.504：1：1.736：2.232≒1：2.0：3.4：4.4 となる．

14.4 $SU(2)_L \times U(1)_y$ 理論のゲージ・ボソン $W^{a\mu}$ ($a = 1, 2, 3$ または $+, -, 0$) および B^μ の従う波動方程式は

$$\Box \hat{W}^{a\mu} - \partial^\mu \partial_\nu \hat{W}^{a\nu} = \hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})$$
$$\Box \hat{B}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \hat{B}^\nu = \hat{j}_y^\mu(\hat{\phi})$$

である(式(14.30)参照)．右辺は Higgs 場 ϕ が存在するために真空媒質中の"自由"粒子に働く相互作用である．Higgs 場を式(14.158) のようにとるとき，弱いアイソスピン SU(2) のカレントは式(14.159)

$$\hat{j}^{a\mu}(\hat{\phi})=\left(-\frac{g^2}{4}\hat{W}^{a\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{B}^{\mu}\delta^{a3}\right)(f^2+2f\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^2)$$

弱いハイパー荷 U(1) のカレントは式(14.160)

$$\hat{j}_y^{\mu}(\hat{\phi})=\left(-\frac{g'^2}{4}\hat{B}^{\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{W}^{3\mu}\right)(f^2+2f\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^2)$$

で与えられる．

いま $a=1$, 2 とおき，$\hat{W}^1$, $\hat{W}^2$ を $\hat{W}^+$, $\hat{W}^-$ と書けばその満たす方程式は

$$\Box\hat{W}^{\pm\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{W}^{\pm\nu}=-\frac{g^2\hat{W}^{\pm\mu}}{4}\cdot(f^2+2f\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^2)$$

$$=-\frac{g^2f^2}{4}\cdot\hat{W}^{\pm\mu}\cdot\left(1+\frac{2\hat{\sigma}}{f}+\frac{\hat{\sigma}^2}{f^2}\right)=-M_{\mathrm{W}}^2\cdot W^{\pm\mu}\left(1+\frac{2\hat{\sigma}}{f}+\frac{\hat{\sigma}^2}{f^2}\right)$$

ここに式(14.50) より Higgs 場の定数部分 f は W 粒子の質量と同定されるからである．パラメーター f を M_{W}, θ_{W}, e で表せば，式(14.70) より

$$f=\frac{2M_{\mathrm{W}}}{g}=\frac{2M_{\mathrm{W}}\sin\theta_{\mathrm{W}}}{e}$$

これを $\hat{W}^{\pm\mu}$ の方程式に代入すれば式(14.161)

$$(\Box+M_{\mathrm{W}}^2)\hat{W}^{\pm\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{W}^{\pm\nu}=-\frac{eM_{\mathrm{W}}}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}\cdot\hat{W}^{\pm\mu}\hat{\sigma}-\frac{M_{\mathrm{W}}^2}{f^2}\hat{W}^{\pm\mu}\cdot\hat{\sigma}^2$$

$$=-\frac{eM_{\mathrm{W}}}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}\cdot\hat{W}^{\pm\mu}\hat{\sigma}-\frac{e^2}{4\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}\cdot\hat{W}^{\pm\mu}\hat{\sigma}^2$$

が得られる．

次に $a=3$ とおけば

$$\Box\hat{W}^{3\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{W}^{3\nu}=\left(-\frac{g^2}{4}\hat{W}^{3\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{B}^{\mu}\right)(f^2+2f\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^2)$$

$$\Box\hat{B}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{B}^{\nu}=\left(-\frac{g'^2}{4}\hat{B}^{\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{W}^{3\mu}\right)(f^2+2f\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^2)$$

である．定義(14.64)，(14.66) により $W^{3\mu}$, B^{μ} の線型結合として

$$\hat{A}^{\mu}=\sin\theta_{\mathrm{W}}\cdot\hat{W}^{3\mu}+\cos\theta_{\mathrm{W}}\cdot\hat{B}^{\mu}$$

$$\hat{Z}^{\mu}=\cos\theta_{\mathrm{W}}\cdot\hat{W}^{3\mu}-\sin\theta_{\mathrm{W}}\cdot\hat{B}^{\mu}$$

を導入し，$\hat{Z}^{\mu}$，$\hat{A}^{\mu}$ の満たす方程式を導く．方程式は $\hat{W}^{3\mu}$，$\hat{B}^{\mu}$ に関して線型だから，相互作用項も同じ係数の線型結合で表される．$\hat{Z}^{\mu}$ の満たす方程式の右辺に現れるカレント $\hat{j}^{\mu}(\hat{Z})$ は

$$\hat{j}^{\mu}(\hat{Z})=\left[\cos\theta_W\cdot\left(-\frac{g^2}{4}\hat{W}^{3\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{B}^{\mu}\right)\right.$$
$$\left.-\sin\theta_W\cdot\left(-\frac{g'^2}{4}\hat{B}^{\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{W}^{3\mu}\right)\right]f^2\cdot\left(1+\frac{2\hat{\sigma}}{f}+\frac{\sigma^2}{f^2}\right)$$

となる．式(14.63a) より $g'=g\tan\theta_W$ であるから

$$f^2[\cdots\cdots]=\frac{-g^2f^2}{4}[\cos\theta_W(\hat{W}^{3\mu}-\tan\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu})$$
$$-\sin\theta_W(\tan^2\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}-\tan\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu})]$$

式(14.68) を用いて M_Z と θ_W で表せば

$$\frac{g^2f^2}{4}=M_W^2=M_Z^2\cos^2\theta_W$$

だから

$$f^2[\cdots\cdots]=-M_Z^2\cos^2\theta_W[\cos\theta_W(\hat{W}^{3\mu}-\tan\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu})$$
$$-\sin\theta_W(\tan^2\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}-\tan\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu})]$$
$$=-M_Z^2[\cos^3\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}-\cos^2\theta_W\sin\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}$$
$$-\sin^3\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}+\cos\theta_W\sin^2\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}]$$
$$=-M_Z^2[\cos\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}-\sin\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}]=-M_Z^2\hat{Z}^{\mu}$$

一方 f を M_Z，θ_W，e で表すと

$$f=\frac{2M_W}{g}=\frac{2M_W\sin\theta_W}{e}=\frac{2M_Z\cos\theta_W\sin\theta_W}{e}=\frac{M_Z\sin2\theta_W}{e}$$

$$\therefore\quad \Box\hat{Z}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{Z}^{\nu}=\hat{j}^{\mu}(\hat{Z})=-M_Z^2\hat{Z}^{\mu}\left(1+\frac{2\hat{\sigma}}{f}+\frac{\hat{\sigma}^2}{f^2}\right)$$

すなわち式(14.162)

$$(\Box+M_Z^2)\hat{Z}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{Z}^{\nu}=-\frac{2eM_Z}{\sin2\theta_W}\cdot\hat{Z}^{\mu}\hat{\sigma}-\frac{M_Z^2}{f^2}\cdot\hat{Z}^{\mu}\hat{\sigma}^2$$
$$=-\frac{2eM_Z}{\sin2\theta_W}\cdot\hat{Z}^{\mu}\hat{\sigma}-\frac{e^2}{\sin^22\theta_W}\hat{Z}^{\mu}\hat{\sigma}^2$$

が得られる．

まったく平行に $\hat{A}^{\mu}$ の満たす方程式の右辺に現れるカレント $\hat{j}^{\mu}(\hat{A})$ は

$$\hat{j}^{\mu}(\hat{A})=\left[\sin\theta_W\cdot\left(-\frac{g^2}{4}\hat{W}^{3\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{B}^{\mu}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\theta_W\cdot\left(-\frac{g'^2}{4}\hat{B}^{\mu}+\frac{gg'}{4}\hat{W}^{3\mu}\right)\right]f^2\cdot\left(1+\frac{2\hat{\sigma}}{f}+\frac{\hat{\sigma}^2}{f^2}\right)$$

である．

$$f^2[\cdots\cdots]=-M_Z^2\cos^2\theta_W[\sin\theta_W(\hat{W}^{3\mu}-\tan\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu})$$
$$+\cos\theta_W(\tan^2\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}-\tan\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu})]\left(1+\frac{2\hat{\sigma}}{f}+\frac{\hat{\sigma}^2}{f^2}\right)$$
$$=-M_Z^2\cos^2\theta_W[\sin\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}-\sin\theta_W\tan\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}$$
$$+\sin\theta_W\tan\theta_W\cdot\hat{B}^{\mu}-\sin\theta_W\cdot\hat{W}^{3\mu}]\left(1+\frac{2\hat{\sigma}}{f}+\frac{\hat{\sigma}^2}{f^2}\right)$$
$$=0$$

したがって式(14.163)

$$\Box\hat{A}^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}\hat{A}^{\nu}=0$$

が導かれる．

14.5 質量を持たない Dirac 粒子は式(14.173) を満たし，持つ粒子は式(14.172) を満たす．今弱い 2 重子の上の成分を ν，下の成分を e と標示して

$$\hat{l}=\begin{pmatrix}\hat{\psi}_L{}^{(\nu)}\\ \hat{\psi}_L{}^{(e)}\end{pmatrix}$$

と書く．右回り，左回りの成分を添字 R，L で表す．1 重子の $\hat{\psi}_R{}^{(e)}$，2 重子の $\hat{l}$ に対し式(14.175) をあからさまに書けば，弱いアイソスピンの空間で

$$i\partial\!\!\!/\hat{\psi}_R{}^{(e)}=g_f\left(0,\ \frac{f}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\hat{\psi}_L{}^{(\nu)}\\ \hat{\psi}_L{}^{(e)}\end{pmatrix}=\frac{g_f\cdot f}{\sqrt{2}}\hat{\psi}_L{}^{(e)}$$

$$i\partial\!\!\!/\begin{pmatrix}\hat{\psi}_L{}^{(\nu)}\\ \hat{\psi}_L{}^{(e)}\end{pmatrix}=g_f\hat{\psi}_R{}^{(e)}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{f}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{g_f\cdot f}{\sqrt{2}}\hat{\psi}_R{}^{(e)}\end{pmatrix}$$

が成り立つ．

$$\therefore\quad i\partial\!\!\!/\psi_R{}^{(e)}=\frac{g_f\cdot f}{\sqrt{2}}\hat{\psi}_L{}^{(e)},\ \ i\partial\!\!\!/\psi_L{}^{(\nu)}=0,\ \ i\partial\!\!\!/\psi_L{}^{(e)}=\frac{g_f\cdot f}{\sqrt{2}}\hat{\psi}_R{}^{(e)}$$

上の成分 $\psi^{(\nu)}$ については式(14.173)の一部が得られるが，これはあらかじめ設定した条件を再現しているにすぎない．下の成分 $\psi^{(e)}$ については 2 つの式

(14.172)から質量 $m=g_f \cdot f/\sqrt{2}$ が生じたと解釈される．結合定数は

$$\therefore \quad g_f=\frac{\sqrt{2}\,m}{f}$$

《15 章》

15.1 $P_{\mu\nu}=\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\nu(k,\ \lambda)=Ag_{\mu\nu}+Bk_\mu k_\nu+Ck_\mu t_\nu+Dk_\nu t_\mu+Et_\mu t_\nu$

両辺に $\varepsilon^\mu(k,\ \lambda')$ を縮約すると，左辺は式(15.8) より

$$\sum_\mu\sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\ \lambda')\varepsilon_\mu(k,\ \lambda)\varepsilon_\nu(k,\ \lambda)=\sum_\lambda[-\delta_{\lambda\lambda}\varepsilon_\nu(k,\ \lambda)]=-\varepsilon_\nu(k,\ \lambda')$$

右辺は $(\varepsilon\cdot k)=(\varepsilon\cdot t)=0$ より $A\varepsilon_\nu(k,\ \lambda')$ しか残らないから $A=-1$ である．

次に k^μ を両辺に縮約すると $(k\cdot k)=0$ より

$$0=(-1+D(k\cdot t))k_\nu+E(k\cdot t)t_\nu$$

さらに k^ν で縮約するとふたたび $(k\cdot k)=0$ より

$$0=E\cdot(k\cdot t)^2$$

$$\therefore \quad E=0$$

これを直前の式に代入すれば

$$D=\frac{1}{(k\cdot t)}$$

もとの式にもどって t^μ で縮約すれば

$$0=-t_\nu+B(k\cdot t)k_\nu+C(k\cdot t)t_\nu+\frac{(t\cdot t)}{(k\cdot t)}k_\nu$$

さらに k^ν で縮約すれば

$$0=-(k\cdot t)+C(k\cdot t)^2$$

$$\therefore \quad C=\frac{1}{(k\cdot t)}(=D)$$

k^ν のかわりに t^ν で縮約すれば

$$0=-(t\cdot t)+B(k\cdot t)^2+C(k\cdot t)(t\cdot t)+(t\cdot t)$$

$$=B(k\cdot t)^2+(t\cdot t)$$

$$\therefore \quad B=\frac{-(t\cdot t)}{(k\cdot t)^2}$$

まとめて

$$P_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}-\frac{t^2}{(k\cdot t)^2}k_\mu k_\nu+\frac{k_\mu t_\nu+k_\nu t_\mu}{(k\cdot t)}$$

$$=-g_{\mu\nu}-[t^2k_\mu k_\nu-(k\cdot t)(k_\mu t_\nu+k_\nu t_\mu)]/(k\cdot t)^2$$

REFERENCES

Abers E S and Lee B W 1973 *Phys. Rep.* **9C** 1

Abramowicz H *et al* 1982a *Z. Phys.* C **12** 289

—— 1982b *Z. Phys.* C **13** 199

—— 1983 *Z. Phys.* C **17** 283

Adeva B *et al* 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 665

Adler S and Dashen R F 1968 *Current Algebras* (New York: Benjamin)

Aharonov Y and Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485

Aitchison I J R 1972 *Relativistic Quantum Mechanics* (London: Macmillan)

—— 1982 *An Informal Introduction to Gauge Field Theories* (Cambridge: Cambridge University Press)

—— 1985 *Contemp. Phys.* **26** 333

Alles W, Boyer C and Buras A J 1977 *Nucl. Phys.* B **119** 125

Alper B *et al* 1973 *Phys. Lett.* **44B** 521

Altarelli G 1982 *Phys. Rep.* **81** 1

Altarelli G and Parisi G 1977 *Nucl. Phys.* B **126** 298

Altarelli G *et al* 1978a *Nucl. Phys.* B **143** 521

—— 1978b *Nucl. Phys.* B **146** 544 (E)

—— 1979 *Nucl. Phys.* B **157** 461

—— 1984 *Nucl. Phys.* B **246** 12

—— 1985 *Z. Phys.* C **27** 617

Althoff M *et al* 1984 *Z. Phys.* C **22** 307

Anderson C D 1932 *Science* **76** 238

Anderson C D and Neddermeyer S 1937 *Phys. Rev.* **51** 884

Anderson P W 1963 *Phys. Rev.* **130** 439

Antonelli F and Maiani L 1981 *Nucl. Phys.* B **186** 269

Appel J A *et al* 1986 *Z. Phys.* C **30** 341

Arnison G *et al* 1982 *Phys. Lett.* **118B** 167

—— 1983a *Phys. Lett.* **122B** 103

—— 1983b *Phys. Lett.* **126B** 398

—— 1984 *Phys. Lett.* **136B** 294

—— 1985 *Phys. Rev. Lett.* **158B** 494

—— 1986 *Phys. Lett.* **166B** 484

Attwood W B 1980 in *Proc. 1979 SLAC Summer Institute on Particle Physics* (SLAC-224) ed. A Mosher, vol 3

Aubert J J *et al* 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 1404

Augustin J E *et al* 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 1406

Bagnaia P *et al* 1983 *Phys. Lett.* **129B** 130

—— 1984 *Phys. Lett.* **144B** 283

Bailin D 1982 *Weak Interactions* (Bristol: Adam Hilger)

Banner M *et al* 1973 *Phys. Lett.* **44B** 537
—— 1982 *Phys. Lett.* **118B** 203
—— 1983a *Phys. Lett.* **122B** 322
—— 1983b *Phys. Lett.* **122B** 476
Barber D P *et al* 1979 *Phys. Rev. Lett.* **43** 830
Bardeen J 1957 *Nuovo Cimento* **5** 1766
Barger V, Martin A D and Phillips R J N 1983 *Z. Phys.* C **21** 99
Bartel W B *et al* 1968 *Phys. Lett.* **28B** 148
Behrend H-J *et al* 1982 *Phys. Lett.* **110B** 329
—— 1987 *Phys. Lett.* **183B** 400
Berends F A *et al* 1981 *Phys. Lett.* **103B** 124
Berends F A, Kleiss R and Jadach S 1983 *Nucl. Phys.* B **202** 63
Berman S M, Bjorken J D and Kogut J B 1971 *Phys. Rev.* D **4** 3388
Bernstein J 1968 *Elementary Particles and their Currents* (San Francisco: Freeman)
Berry M V 1984 *Proc. R. Soc.* A **392** 45
Bjorken J D 1969 *Phys. Rev.* **179** 1547
—— 1973 *Phys. Rev.* D **8** 4098
Bjorken J D and Drell S D 1964 *Relativistic Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill)
Bludman S A 1958 *Nuovo Cimento* **9** 443
Bodek A *et al* 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 1087
—— 1974 *Phys. Lett.* **51B** 417
Bogoliubov N N and Shirkov D V 1980 *Introduction to the Theory of Quantised Fields* (Chichester: Wiley-Interscience) 3rd edn, translated by S Chomet
Böhm M and Hollik W 1982 *Nucl. Phys.* B **204** 45
—— 1984 *Phys. Lett.* **139B** 213
Bohr N 1913 Phil Mag. **26** 1, 476, 857
Born M, Heisenberg W and Jordan P 1926 *Z. Phys.* **35** 557
Bosetti P C *et al* 1978 *Nucl. Phys.* B **142** 1
Bracci L and Fiorentini G 1982 *Phys. Rep.* **86** 169
Brandelik R *et al* 1979 *Phys. Lett.* **86B** 243
—— 1980 *Phys. Lett.* **97B** 453
Budny R 1975 *Phys. Lett.* **55B** 227
Büsser F W *et al* 1972 *Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Chicago* (Batavia: FNAL) vol 3
—— 1973 *Phys. Lett.* **46B** 471
Cabibbo N 1963 *Phys. Rev. Lett.* **10** 531
Callan C G and Gross D 1969 *Phys. Rev. Lett.* **22** 156
Cashmore R J, Hawkes C M, Lynn B W and Stuart R G 1986 *Z. Phys.* C **30** 125
Casimir H B G 1948 *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc.* **51** 793

Chambers R G 1960 *Phys. Rev. Lett.* **5** 3
CHARM Collaboration 1981 *Phys. Lett.* **99B** 265
Chen M-S and Zerwas P 1975 *Phys. Rev.* D **12** 187
Close F E 1979 *An Introduction to Quarks and Partons* (London: Academic)
Coleman S 1975 *Laws of Hadronic Matter* ed. A Zichichi (London: Academic) pp 141–2
Coleman S and Gross D J 1973 *Phys. Rev. Lett.* **31** 851
Collins J C 1984 *Renormalization* (Cambridge: Cambridge University Press)
Collins P D B and Martin A D 1984 *Hadron Interactions* (Bristol: Adam Hilger)
Combridge B L *et al* 1977 *Phys. Lett.* **70B** 234
Conversi M E *et al* 1947 *Phys. Rev.* **71** 209
Cooper L N 1956 *Phys. Rev.* **104** 1189
Cottingham W N and Greenwood D A 1986 *An Introduction to Nuclear Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
Creutz M 1979 *Phys. Rev. Lett.* **45** 313
—— 1983 *Quarks, Gluons and Lattices* (Cambridge: Cambridge University Press)
Cundy D C 1974 *Proc. XVII Int. Conf. on High Energy Physics, London, July 1974* (Didcot, Berks: Science Research Council) pp IV-131–IV-148
Dalitz R H 1953 *Phil. Mag.* **44** 1068
—— 1965 in *High Energy Physics* ed. C de Witt and M Jacob (New York: Gordon and Breach)
—— 1967 in *Proc. Second Hawaii Topical Conf. in Particle Physics,* ed. S Pakvasa and S F Tuan (Honolulu: University of Hawaii Press)
Danby G *et al* 1962 *Phys. Rev. Lett.* **9** 36
Dawson S, Hagelin J S and Hall L 1981 *Phys. Rev.* D **23** 2666
Decker R, Paschos E A and Brown R W 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 1192
de Groot J G H *et al* 1979 *Z. Phys.* C **1** 143
di Lella L 1985 *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **35** 107
—— 1986 in *Proc. Int. Europhysics Conf. on High Energy Physics, Bari, Italy, July 1985* ed. L Nitti and G Preparata (Bari: Laterza) pp 761ff
Dirac P A M 1927 *Proc. R. Soc.* A **114** 243
—— 1928 *Proc. R. Soc.* A **117** 610
—— 1931 *Proc. R. Soc.* A **133** 60
—— 1981 *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Oxford University Press) 4th edn (reprinted)
Drell S D and Yan T M 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 316
Duke D W and Roberts R G 1985 *Phys. Rep.* **120** 275
Eden R J, Landshoff P V, Olive D I and Polkinghorne J C 1966 *The Analytic S-matrix* (Cambridge: Cambridge University Press)
Ehrenburg W and Siday R E 1949 *Proc. Phys. Soc.* B **62** 8
Eisberg R M 1961 *Fundamentals of Modern Physics* (New York: Wiley)

Ellis J 1979 *Proc. LEP Summer Study, Geneva, 1979* CERN 79-01, pp 615ff
—— 1981 in *Proc. 1981 SLAC Summer Institute on Particle Physics* (SLAC-245) ed. A Mosher, pp 621ff
Ellis J and Karliner I 1979 *Nucl. Phys.* B **148** 141
Ellis J *et al* 1976a *Nucl. Phys.* B **106** 292
—— 1976b *Nucl. Phys.* B **111** 253
Englert F and Brout R 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 321
Faddeev L D and Popov V N 1967 *Phys. Lett.* **25B** 29
Fermi E 1934a *Nuovo Cimento* **11** 1
—— 1934b *Z. Phys.* **88** 161
Feynman R P 1962 *The Theory of Fundamental Processes* (New York: Benjamin) Ch 5
—— 1963a *Acta Phys. Polon.* **26** 697
—— 1963b *The Feynman Lectures on Physics* vol 1 (Reading, MA: Addison-Wesley) ch 15
—— 1964 *The Feynman Lectures on Physics* vol 2 (Reading: MA: Addison-Wesley)
—— 1965 *The Feynman Lectures on Physics* vol 3 (Reading; MA: Addison-Wesley)
—— 1972 *Statistical Mechanics* (Reading, MA: Benjamin)
—— 1977 in *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy* ed. R Balian and C H Llewellyn Smith (Amsterdam: North-Holland) p 121
Feynman R P and Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill)
Franck J and Hertz G 1914 *Verh. Deutschen Phys. Ges.* **16** 457
Fregeau J H and Hofstadter R 1955 *Phys. Rev.* **99** 1503
French A P and Taylor E F 1978 *An Introduction to Quantum Physics* (New York: Norton)
Friedman J I and Kendall H W 1972 *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **22** 203
Frishman Y 1974 *Phys. Rep.* **13C** 1
Fritzsch H and Gell-Mann M 1972 in *Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Chicago* (Batavia: FNAL) vol 2
Furman M 1982 *Nucl. Phys.* B **197** 413
Gasiorowicz S 1966 *Elementary Particle Physics* (New York: Wiley)
—— 1974 *Quantum Physics* (New York: Wiley)
Gastmans R 1975 *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies, Cargese 1975* ed. M Levy, J L Basdevant, D Speiser and R Gastmans (New York: Plenum) pp 109ff
Geer S 1986 in *High Energy Physics 1985, Proc. Yale Theoretical Advanced Study Institute* (Singapore: World Scientific) vol 2
Geiger H and Marsden E 1909 *Proc. R. Soc.* **82** 495
—— 1913 *Phil. Mag.* **25** 604

Gell-Mann M 1953 *Phys. Rev.* **92** 833
—— 1961 *California Institute of Technology Report* CTSL-20 (reprinted in Gell-Mann and Ne'eman 1964)
—— 1964 *Phys. Lett.* **8** 214
Gell-Mann M and Ne'eman Y 1964 *The Eightfold Way* (New York: Benjamin)
Georgi H and Glashow S L 1974 *Phys. Rev. Lett.* **32** 438
Georgi H, Quinn H R and Weinberg S 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 451
Gibson W M and Pollard B R 1976 *Symmetry Principles in Elementary Particle Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
Glashow S L 1961 *Nucl. Phys.* **22** 579
Glashow S L, Iliopoulos J and Maiani L 1970 *Phys. Rev.* D **2** 1285
Goldstone J 1961 *Nuovo Cimento* **19** 154
Gottschalk T and Sivers D 1980 *Phys. Rev.* D **21** 102
Green M B, Schwarz J H and Witten E 1987 *Superstring Theory* (Cambridge: Cambridge University Press) vols I and II
Greenberg O W 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 598
Gross D J and Llewellyn Smith C H 1969 *Nucl. Phys.* B **14** 337
Gross D J and Wilczek F 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343
Guralnick G S, Hagen C R and Kibble T W B 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 585
Halzen F and Martin A D 1984 *Quarks and Leptons* (New York: Wiley)
Herb S W *et al* 1977 *Phys. Rev. Lett.* **39** 252
Heisenberg W 1932 *Z. Phys.* **77** 1
Higgs P W 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 508
—— 1966 *Phys. Rev.* **145** 1156
Hofstadter R 1958 *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7** 231
't Hooft G 1971a *Nucl. Phys.* B **33** 173
—— 1971b *Nucl. Phys.* B **35** 167
—— 1971c *Phys. Lett.* **37B** 195
—— 1976 *High Energy Physics, Proc. European Physical Society Int. Conf.* ed. A Zichichi (Bologna: Editrice Composition) p 1225
—— 1980 *Sci. Am.* **242** (6) 90–116
't Hooft G and Veltman M 1972 *Nucl. Phys.* B **44** 189
Horgan R and Jacob M 1981 *Nucl. Phys.* B **179** 441
Hughes R J 1981 *Nucl. Phys.* B **186** 376
Innes W R *et al* 1977 *Phys. Rev. Lett.* **39** 1240
Isgur N and Karl G 1983 *Phys. Today* **36** (11) 36
Itzykson C and Zuber J-B 1980 *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill)
Jacob M and Landshoff P V 1978 *Phys. Rep.* **48C** 285
Jones S E 1986 *Nature* **321** 127
Kibble T W B 1967 *Phys. Rev.* **155** 1554
Kim K J and Schilcher K 1978 *Phys. Rev.* D **17** 2800

Kinoshita T 1962 *J. Math. Phys.* **3** 650
Kinoshita T and Sapirstein J 1984 in *Atomic Physics Nine*, ed. R S Van Dyck Jr and E N Fortson (Singapore: World Scientific)
Kitchener J A and Prosser A P 1957 *Proc. R. Soc.* A **242** 403
Kobayashi M and Maskawa K 1973 *Prog. Theor. Phys.* **49** 652
Kunszt Z and Piétarinen E 1980 *Nucl. Phys.* B **164** 45
La Rue G, Fairbank W M and Hebard A F 1977 *Phys. Rev. Lett.* **38** 1011
La Rue G, Phillips J D and Fairbank W M 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 967
Lattes C M G *et al* 1947 *Nature* **159** 694
Lautrup B 1976 *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies, Cargese 1975* ed. M Levy, J L Basdevant, D Speiser and R Gastmans (New York: Plenum) p 40
Lee B W, Quigg C and Thacker H B 1977 *Phys. Rev.* D **16** 1519
Lee T D 1981 *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (Chur: Harwood)
Lee T D and Nauenberg M 1964 *Phys. Rev.* B **133** 1549
Lee T D and Yang C N 1955 *Phys. Rev.* **98** 1501
—— 1956 *Phys. Rev.* **104** 254
—— 1962 *Phys. Rev.* **128** 855
LEP 1979 *Proc. LEP Summer Study, Geneva, 1979* CERN 79-01
Lichtenberg D B 1978 *Unitary Symmetry and Elementary Particles* (London: Academic) 2nd edn
Linde A D 1976 *JETP Lett.* **23** 73
Llewellyn Smith C H 1974 *Phenomenology of Particles at High Energies* ed. R L Crawford and R Jennings (London: Academic) pp 459–528
—— 1979 *Proc. LEP Summer Study, Geneva, 1979* CERN 79-01, pp 35ff
Llewellyn Smith C H and Wheater J F 1982 *Nucl. Phys.* B **208** 27
London F 1950 *Superfluids Vol 1, Microscopic Theory of Superconductivity* (New York: Wiley)
Lynn B W and Stuart R G 1985 *Nucl. Phys.* B **253** 216
Mandelstam S 1974 *Phys. Rep.* **13C** 259
—— 1976 *Phys. Rep.* **23C** 245
—— 1980 *Phys. Rep.* **67C** 109
Mandl F and Shaw G 1984 *Quantum Field Theory* (Chichester: Wiley)
Marciano W J 1979 *Phys. Rev.* D **20** 274
Marciano W J and Sirlin A 1984 *Phys. Rev.* D **29** 945
Maxwell J C 1864 *Phil. Trans. R. Soc.* **155** 459
Nambu Y 1960 *Phys. Rev. Lett.* **4** 380
—— 1974 *Phys. Rev.* D **10** 4262
Ne'eman Y 1961 *Nucl. Phys.* **26** 222
Nielsen H B and Olesen P 1973 *Nucl. Phys.* B **61** 45
Nielsen N K 1981 *Am. J. Phys.* **49** 1171

Nishijima K 1955 *Prog. Theor. Phys.* **13** 285
—— 1969 *Fields and Particles* (New York: W A Benjamin)
Noether E 1918 *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 171
Occhialini G P S and Powell C F 1947 *Nature* **159** 186
Pais A 1952 *Phys. Rev.* **86** 663
Panofsky W K H and Phillips M 1962 *Classical Electricity and Magnetism* (Reading, MA: Addison-Wesley) 2nd edn
Parisi G 1980 *Phys. Lett.* **90B** 295
Pati J C and Salam A 1974 *Phys. Rev.* D **10** 275
Pauli W 1933 *Handb. Phys.* **24** 246
Pennington M R 1983 *Rep. Prog. Phys.* **46** 393
Perkins D H 1947 *Nature* **159** 126
—— 1972 *Introduction to High Energy Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley)
—— 1982 *Introduction to High Energy Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley) 2nd edn
—— 1984 *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **34** 1
—— 1987 *Introduction to High Energy Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley) 3rd edn
Perl M *et al* 1975 *Phys. Rev. Lett.* **35** 1489
Politzer H D 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346
Prescott C Y *et al* 1978 *Phys. Lett.* **77B** 347
Quigg C 1977 *Rev. Mod. Phys.* **49** 297
Review of Particle Properties 1984 *Rev. Mod. Phys.* **56** S1-S304
Ross G G 1984 *Grand Unified Theories* (Menlo Park, CA: Benjamin/ Cummings)
Rubbia C, McIntyre P and Cline D 1977 *Proc. Int. Neutrino Conf., Aachen, 1976* (Braunschweig: Vieweg) p 683
Rutherford E 1911 *Phil. Mag.* **21** 669
Ryder L H 1985 *Quantum Field Theory* (Cambridge: Cambridge University Press)
Sachrajda C T C 1983 in *Gauge Theories in High Energy Physics, Les Houches Lectures, Session XXXVII* ed. M K Gaillard and R Stora (Amsterdam: North-Holland)
Sagawa H *et al* 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 93
Saint-James D, Sarma G and Thomas E J 1969 *Type II Superconductivity* (Oxford: Pergamon)
Sakurai J J 1960 *Ann. Phys., NY* **11** 1
Salam A 1968 *Elementary Particle Theory* ed. N Svartholm (Stockholm: Almqvist) p 367
Salam A and Ward J C 1964 *Phys. Lett.* **13** 168
Schiff L I 1955 *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill) 2nd edn
Schrieffer J R 1964 *Theory of Superconductivity* (New York: Benjamin)

Schwinger J 1957 *Ann. Phys, NY* **2** 407
—— 1962 *Phys. Rev.* **125** 397
Scott D M 1985 in *Proc. School for Young High Energy Physicists, Rutherford Appleton Laboratory, 1984* (RAL-85-010) ed. J B Dainton
Shaw R 1955 *The Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles: PhD Thesis* University of Cambridge
Sirlin A and Marciano W J 1981 *Nucl. Phys.* B **189** 442
Sparnaay M J 1958 *Physica* **24** 751
Staff of the CERN p̄p project 1981 *Phys. Lett.* **107B** 306
Street J C and Stevenson E C 1937 *Phys. Rev.* **52** 1003
Sushkov O P, Flambaum V V and Khriplovich I B 1975 *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** 537
Tassie L J 1974 *Int. J. Theor. Phys.* **9** 167
Taylor J C 1976 *Gauge Theories of Weak Interactions* (Cambridge: Cambridge University Press)
Taylor J R 1972 *Scattering Theory* (New York: Wiley)
Tilley D R and Tilley J 1986 *Superfluidity and Superconductivity* (Bristol: Adam Hilger)
Uehling E A 1935 *Phys. Rev.* **48** 55
Utiyama R 1956 *Phys. Rev.* **101** 1597
Van Dyck R S Jr, Schwinberg P B and Dehmelt H G 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 26
Veltman M 1977 *Act. Phys. Polon.* **B8** 475
Wegner F J 1971 *J. Math. Phys.* **12** 2259
Weinberg S 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1264
—— 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 294
—— 1980 *Rev. Mod. Phys.* **52** 513
von Weizsäcker C F 1934 *Z. Phys.* **88** 612
Wetzel W 1983 *Nucl. Phys.* B **227** 1
Wick G C 1938 *Nature* **142** 993
—— 1950 *Phys. Rev.* **80** 268
Wigner E P 1949 *Proc. Am. Phil. Soc.* **93** 521; also reprinted in *Symmetries and Reflections* (Bloomington: Indiana University Press) pp 3–13
Wilczek F 1977 *Phys. Rev. Lett.* **39** 1304
Williams E J 1934 *Phys. Rev.* **45** 729
Wilson K G 1969 *Phys. Rev.* **179** 1499
—— 1974 *Phys. Rev.* D **14** 2455
—— 1975 in *New Phenomena in Subnuclear Physics, Proc. 1975 Int. School on Subnuclear Physics 'Ettore Majorana'* ed. A Zichichi (New York: Plenum)
Wu C S, Ambler E, Hayward R W, Hoppes D D and Hudson R P 1957 *Phys. Rev.* **105** 1413
Yang C N and Mills R L 1954 *Phys. Rev.* **96** 191

Yukawa H 1935 *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17** 48
Zweig G 1964 *CERN Preprint* TH-401

索　引

H

L

M

N

訳者紹介

ふじい　あきひこ
藤井　昭彦

1953年　東京大学理学部物理学科卒業
1958年　Rochester大学大学院卒業，Ph. D.
現　在　上智大学理工学部物理学科・教授
主要著訳書
「ベータ崩壊と弱い相互作用」(培風館，共著)
「時間の源流をたずねて」(講談社，共訳)
「ゲージ場入門」(講談社，訳書)

NDC421　398p.　21cm

ゲージ理論入門 II (第2版)
—弱い相互作用と強い相互作用—

1992年10月1日　第1刷発行

定　価　5,300円(本体5,146円)
訳　者　藤井昭彦
発行者　野間佐和子
発行所　株式会社　講談社
〒112－01　東京都文京区音羽2－12－21
販売部　(03)5395－3624
製作部　(03)5395－3615
編　集　株式会社　講談社サイエンティフィク
代表　加藤勝久
〒162　東京都新宿区新小川町9－25　日商ビル
編集部　(03)3235－3701
印刷所　株式会社　廣済堂
製本所　株式会社　若林製本工場

落丁本・乱丁本は，講談社書籍製作部宛にお送り下さい．
送料小社負担にてお取替えします．

ISBN4-06-153206-5　(KS)